ХИМИКОТЕХНОЛОГИЧЕН И МЕТАЛУРГИЧЕН УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛТЕТ ПО ХИМИЧНО И СИСТЕМНО ИНЖЕНЕРСТВО

КАТЕДРА „Математика“

проф. д-р Ангел Борисов Дишлиев

ТЕМА

МАТЕМАТИЧЕСКО МОДЕЛИРАНЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ НА ПРЕКЪСНАТИ ПРОЦЕСИ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

на дисертация

за придобиване на научната степен
„доктор на науките”
по научна специалност 4.5. Математика
(Математическо моделиране и приложение на математиката)

Научно жури:

1. проф. д-р Александър Александров – председател, становище
2. проф. дмн Андрей Андреев - рецензент
3. проф. дтн Васил Ангелов - рецензент
4. проф. дмн Гани Стамов - рецензент
5. проф. д-р Андрей Захариев - становище
6. проф. д-р Асен Рахнев - становище
7. проф. д-р Коста Гъров - становище

София, 2018

Дисертационният труд е написан на 542 страници, съдържа 25 фигури и 4 таблици. Цитирани са 350 източника.

Представеният дисертационен труд е обсъден и приет за защита на заседание на научен съвет на научното звено на катедра „Математика”, състояло се на 01.06. 2018 г.

Публичната защита на дисертационния труд ще се проведе на 25.09. 2018 г. от 12:00 часа в зала 424, сграда „А” на ХТМУ.

Материалите са на разположение на интересуващите се на интернет страницата на ХТМУ и в отдел „Научни дейности”, стая 406, етаж 4, сграда „А” на ХТМУ.

Означенията и номерацията в автореферата и дисертационния труд съвпадат.

Класове диференциални уравнения с променливи структура и импулсни моменти

В настоящата дисертация се изучават и използват като математически апарат няколко класа диференциални уравнения. Най-съществена особеност на тези диференциални уравнения е наличието на импулсни въздействия и смяната на структурата (дясната страна на уравнението).

С помощта на диференциалните уравнения с импулсни въздействия се описват и изследват „скокообразни” динамични процеси. Този тип процеси са подложени на многократни дискретни външни въздействия. Въздействията се осъществяват последователно за сравнително „кратки“ времеви интервали, които са пренебрежими в сравнение с общата продължителност на изучавания динамичен процес. Това е основание да се приеме, че въздействията се извършват мигновено под формата на импулси.

Диференциалните уравнения с импулси са въведени от В. Мильман и А. Мышкис в първата половина на шестдесетте години на миналия век (виж [Мильман 1] и [Мильман 2]). В тези работи са дадени някои общи съображения за необходимостта от изучаване на уравненията с импулсно въздействие. Получени са първите резултати за устойчивост на техните решения.

Ще отбележим, че по начина на определяне и математическото описание на импулсните въздействия този тип уравнения се делят на два основни класа:

- Клас А: Импулсните въздействия се дефинират с помощта на обобщени функции (от типа на функцията на P. Dirac, виж [Халанай 1] и [Pandit 1]);
- Клас Б: Импулсните въздействия се определят с помощта на нарастването на търсената функция в моментите на въздействие (виж [Самойленко 2] и [Lakshmikantham 1]).

В настоящия труд се изследват уравнения с импулси от втория тип (клас Б). По начина на определяне на моментите на импулсни въздействия този тип диференциални уравнения (от клас Б) се разделят на различни подкласове, от които тук ще посочим следните:

- Б1. С фиксирани моменти на импулсно въздействие (виж изследванията: [Agarwal 1], [Agarwal 3], [Ahmad 1], [Ahmad 4], [Ahmad 5], [Ahmad 8], [Akhmet 1], [Akhmet 3], [Ali 1], [Alves 1], [Bainov 1], [Bainov 2], [Bainov 3], [Bainov 9], [Bainov 21], [Bainov 22], [Bainov 24], [Bainov 25], [Bainov 28], [Bainov 31], [Bainov 33], [Bainov 34], [Bainov 36] - [Bainov 40], [Benchohra 1], [Benchohra 2], [Berezansky 1], [Chellaboina 1], [Cheng 1], [Dimov 1], [Dimov 2], [Fenner 1], [Gladilina 1], [Gonzalez 1], [He 1], [Henderson 1], [Hristova 1] - [Hristova 1], [Ignatyev 1], [Karandjulov 1], [Kosseva 1], [Kulev 1] - [Kulev 3], [Lakshmikantham 3], [Lakshmikantham 4], [Lan 1], [Luo 1], [Mohamad 1], [Naulin 1], [Nenov 2], [Nieto 2] - [Nieto 4], [Plotnikov 1], [Simeonov 2], [Simeonov 3], [Skripnik 1], [Stamov 3], [Stamov 3], [Stamova 3] - [Stamova 5], [Stamova 7], [Stamova 8], [Tripathy 1], [Vasundhara 1], [Wang 1], [Witayakiattilerd 1], [Xian 1], [Yan 1], [Yang 1] - [Yang 4], [Zabrejko 1], [Zang 1], [Zavalishchin 1], [Zhao 1], [Борисенко 1] - [Борисенко 3], [Гургула 1], [Каранджулов 1], [Каранджулов 2], [Плотников 1] - [Плотников 3], [Самойленко 1] - [Самойленко 3]);
- Б2. С импулсни моменти, съвпадащи с моментите, в които интегралната крива на диференциалното уравнение среща предварително зададени множества, които са разположени в разширеното фазово пространство. Най-често тези множества са не пресичащи се хиперповърхнини (виж работите: [Самойленко 2], [Bainov 4] - [Bainov 8], [Bainov 19], [Bainov 20], [Dishliev 1], [Dishliev 6], [Dishliev 9], [Dishliev 10], [Stamova 1]);
- Б3. С импулсни моменти, които съвпадат с моментите, в които траекторията на диференциалното уравнение среща предварително зададени множества, разположени във фазово пространство. (На този тип уравнения са посветени изследванията: [Bainov 34], [Benchohra 3]- [Benchohra 5], [Chen 3], [Chukleva 1] - [Chukleva 5], [Dishliev 15], [Dishliev 17], [Dishliev 18], [Dishlieva 1], [Dishlieva 2], [Dishlieva 10], [Dishlieva 12], [Dishlieva 15], [Dishlieva 17], [Nenov 2], [Frigon 1] - [Frigon 3], [Fu 1], [Peng 1]);
- Б4. С импулсни моменти, съвпадащи с моментите, в които решението минимизира предварително зададен функционал (виж: [Angelova 1] - [Angelova 4], [Bainov 13], [Bainov 14], [Dishlieva 5], [Dou 1], [Lin 1], [Longo 1], [Nenov 1], [Shuai 1], [Tang 1], [Witayakiattilerd 1], [Zhang 3], [Zhao 2], [Zhao 3]);
- Б5. С импулсни моменти, които са произволни (качествата на решенията на такъв клас уравнения се изучават в: [Dishlieva 3], [Dishlieva 5], [Dishlieva 16]);
- Б6. С импулсни моменти, които имат случаен характер и удовлетворяват определен закон на разпределение (виж; [Самойленко 2], [Мильман 2], [Wu 1]) и др.

Диференциалните уравнения, които се изследват в настоящия дисертационен труд, са от класовете Б1 - Б5. Ще се спрем по-подробно на дефинирането на тези класове:

Клас Б1: Зададени са:

Б1.1. Краен брой или изброимо много обикновени диференциални уравнения, т.е. имаме

$$\frac{dx}{dt}=f_i(x) \quad \text{или} \quad \frac{dx}{dt}=f_i(t,x),\ i=1,2,\dots,$$

където съответно (в автономния случай) функциите $f_1, f_2,\ldots \in C\left[G,R^n\right]$ или (в неавтономния случай) $f_1, f_2,\ldots \in C\left[R\times G,R^n\right]$, тук G е непразна област от R^n;

Б1.2. Крайно или изброимо множество от фиксирани импулсни (или казано по-общо - превключващи) моменти $t_1,t_2,\ldots,\ t_1<t_2<\ldots$. Импулсните въздействия се осъществяват в импулсните моменти. В тези моменти е възможно да се сменя и структурата на уравненията (поради което ги наричаме превключващи моменти).

Б1.3. Импулсни функции $I_1,I_2,\ldots$, с помощта на които се определят импулсните въздействия. Тези въздействия се изразяват в рязка промяна (прекъсване) на решението на импулсните уравнения, т.е.

$$\Delta x(t_i)=x(t_i+0)-x(t_i)=I_i\left(x(t_i)\right)$$

или

$$\Delta x(t_i)=I_i\left(t_i,x(t_i)\right),\ \ i=1,2,\ldots.$$

Импулсните функции $I_1,I_2,\ldots$ са непрекъснати съответно в G - фазовото или в $R^+\times G$ - разширеното фазово пространство.

Клас Б2: Описва се с помощта на:

Б2.1. Множество (крайно или безкрайно) от (автономни или неавтономни) обикновени диференциални уравнения, които описват непрекъснатите части на решението. Множеството (в случая на неавтономни уравнения, както в предходния случай) има вида:

$$\frac{dx}{dt}=f_i(t,x),\ i=1,2,\dots,$$

където функциите $f_1, f_2,\ldots \in C\left[R\times G,R^n\right]$, G е непразна област от R^n;

Б2.2. Изброимо множество от хиперповърхнини:

$$\sigma_i=\left\{(t,x)\in R^+\times G;\ t=\tau_i(x)\right\},\quad i=1,2,\ldots,$$

чрез които се определят импулсните (превключващите) моменти $t_1,t_2,\ldots$. Функциите $\tau_1,\tau_2,\ldots\in C\left[G,R^+\right]$. В импулсните моменти се извършват импулсните въздействия върху решението. Възможно е да се осъществява и смяната на структурата на системата от диференциални уравнения. Тези моменти са последователни решения на системи от алгебрични уравнения. Имаме:

$$t_i=\tau_{j_i}\left(x(t_i)\right)\Leftrightarrow\left(t_i,x(t_i)\right)\in\sigma_{j_i},\ i=1,2,\ldots.$$

Както се вижда в общия случай имаме $i\neq j_i$, т.е. в момента t_i интегралната крива не е задължително да среща точно хиперповърхнината $\sigma_i,\ i=1,2,\ldots$;

Б2.3. Импулсни функции $I_1,I_2,\ldots$, които дефинират импулсните въздействия. Тези въздействия се описват както следва:

$$I_{j_i}\left(t_i,x(t_i)\right)=x(t_i+0)-x(t_i),\ \ i=1,2,\ldots.$$

Импулсните функции $I_1,I_2,\ldots$ са непрекъснати в разширеното фазово (или в частност само във фазовото) пространство на разглежданите уравнения с променливи структура и импулсни моменти, т.е. $I_1,I_2,\ldots\in C\left[R^+\times G,R^n\right]$ $\left(I_1,I_2,\ldots\in C\left[G,R^n\right]\right)$.

Клас Б3: Този клас се състои от следните елементи:

Б3.1. Съвкупност от няколко (възможно е и изброимо много) системи обикновени диференциални уравнения, които описват непрекъснатите части на решението. Съвкупността от споменатите системи (както по-горе) най-общо има вида:

$$\frac{dx}{dt}=f_i(t,x),\ i=1,2,\dots,$$

където функциите $f_1, f_2, ... \in C\left[R \times G, R^n\right]$, т.е. дясната страна на всяка една от горните системи е непрекъсната функция в дефиниционното си множество и фазовото пространство G е непразна област от R^n;

Б3.2. Условия за последователно определяне на превключващите моменти $t_1, t_2, ...$, в които се извършват както импулсните въздействия върху решението, така и смяната на структурата на системата от диференциални уравнения. Тези моменти са последователни решения на системи от алгебрични уравнения от вида:

$$\varphi_i\left(x(t)\right) = 0,\ i = 1, 2, ...,$$

където функциите $\varphi_1, \varphi_2, ...$ се наричат превключващи функции. Тези функции са съответни за всяка една дясна страна и са дефинирани и непрекъснати във фазовото пространство G на изучаваните системи от диференциални уравнения, т.е. $\varphi_1, \varphi_2, ... \in C\left[G, R\right]$;

Б3.3. Импулсни функции $I_1, I_2, ...$, които определят големината (и посоката) на импулсните въздействия. Тези въздействия математически се описват с помощта на равенствата, както следва:

$$I_i\left(t_i, x(t_i)\right) = x(t_i + 0) - x(t_i),\ \ i = 1, 2, ...$$

Импулсните функции $I_1, I_2, ...$ са непрекъснати във фазовото пространство на разглежданите системи с променливи структура и импулсни моменти, т.е. $I_1, I_2, ... \in C\left[G, R^n\right]$.

Клас Б4: Този клас се състои от следните елементи:

Б4.1. Система диференциални уравнения, която описва непрекъснатите части на решението

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x),$$

където функцията $f \in C\left[R \times G, R^n\right]$;

Б4.2. Множество T от всички допустими импулсни моменти $t_1, t_2, ...$ и множество I от всички допустими импулсни въздействия $I_1, I_2, ...$;

Б4.3. Функционал F, за който имаме

$$F = F\left((t_1, t_2, ...), (I_1, I_2, ...)\right) \quad \text{и} \quad F : \mathrm{T} \times \mathrm{I} \to R^+.$$

Импулсните моменти $t_1, t_2, ...$ и импулсните въздействия $I_1, I_2, ...$ се определят така, че функционалът F достига глобален минимум в тях. С други думи, импулсните моменти и импулсните въздействия изпълняват релациите:

$$\left(t_1 = t_1^{opt},\ t_2 = t_2^{opt}, ...\right),\ \left(I_1 = I_1^{opt},\ I_2 = I_2^{opt}, ...\right) \Leftrightarrow$$

- $\left(t_1^{opt}, t_2^{opt}, ...\right) \in \mathrm{T},\ \left(I_1^{opt},\ I_2^{opt}, ...\right) \in \mathrm{I}$;
- $F\left(\left(t_1^{opt}, t_2^{opt}, ...\right), \left(I_1^{opt}, I_2^{opt}, ...\right)\right) = \min\left\{F\left((t_1, t_2, ...), (I_1, I_2, ...)\right);\ (t_1, t_2, ...) \in \mathrm{T},\ (I_1, I_2, ...) \in \mathrm{I}\right\}$.

Клас Б5: Този клас се състои от следните елементи:

Б5.1. Съвкупност от няколко или изброимо много системи диференциални уравнения, които описват непрекъснатите части на решението:

$$\frac{dx}{dt} = f_i(t, x),\ i = 1, 2, ...;$$

Б5.2. Произволни импулсни (превключващи) моменти $t_1, t_2, ...$, които са последователни, т.е. удовлетворяват неравенствата $t_1 < t_2 < t_3 < ...$;

Б5.3. Импулсни функции $I_1, I_2, ... \in C\left[G, R^n\right]$ $\left(I_1, I_2, ... \in C\left[R^+ \times G, R^n\right]\right)$.

Изследванията на системите диференциални уравнения с импулси условно можем да разпределим в три обобщени направления:

1. Изследвания на сравнително общи качества на решенията, които са характерни както за решенията на уравненията без импулси, така и за решенията на уравненията с импулсни

въздействия (виж публикациите: [Agarwal 1] - [Agarwal 5], [Ahmad 1], [Ahmad 2], [Akhmet 1], [Akhmet 3], [Ali 1], [Anokhin 1], [Bainov 1] - [Bainov 13], [Bainov 17], [Bainov 18], [Bainov 23] - [Bainov 29], [Bainov 31], [Bainov 32], [Benchohra 1], [Benchohra 2], [Berezansky 1], [Chellaboina 1], [Chen 1], [Chen 2], [Cheng 1], [Dhage 1], [Dimov 1], [Dimov 2], [Dishliev 4], [Dishliev 5], [Dishlieva 1], [Dishlieva 3], [Dishlieva 15], [Dishlieva 15], [Dou 1], [Erbe 1], [Fenner 1], [Frigon 1] - [Frigon 3], [Fu 1], [Georgieva 1], [Georgieva 2], [Gladilina 1], [Gonzalez 1], [Gopalsamy 2], [He 1], [Henderson 1], [Hristova 2], [Hristova 4], [Hristova 5], [Ignatyev 1], [Kosseva 1], [Kulev 1] - [Kulev 3], [Lakshmikantham 2], [Lakshmikantham 3], [Lan 1], [Li 1], [Li 2], [Luo 1], [Milev 1] - [Milev 3], [Mohamad 1], [Mu 1], [Naulin 1], [Nieto 1] - [Nieto 4], [Peng 1], [Petkova 2], [Plotnikov 1], [Rogovchenko 1], [Shen 1], [Simeonov 1] - [Simeonov 3], [Skripnik 1], [Stamov 1] - [Stamov 4], [Stamova 1] - [Stamova 4], [Tripathy 1], [Vasundhara 1], [Wang 1], [Wu 1], [Xian 1], [Yang 1], [Yang 1], [Zabrejko 1], [Борисенко 1] - [Борисенко 3], [Гургула 1], [Завалищин 1], [Завалищин 2], [Каранджулов 1], [Каранджулов 2], [Перестюк 1], [Плотников 1] - [Плотников 3], [Самойленко 1] - [Самойленко 3]);

2. Изследвания на специфични качества, които са типични само за решенията на уравненията с импулсни въздействия. Тук ще разпределим резултатите в две групи:

2.1. Виж публикациите, които се отнасят за диференциални уравнения с импулсни въздействия във фиксирани моменти: [Angelova 1], [Angelova 2], [Bainov 22], [Bainov 27], [Bainov 33], [Chen 1], [Chen 2], [Dishliev 16], [Dishliev 18], [Hristova 5], [Jiao 2], [Lan 1], [Li 1], [Li 2], [Naulin 1], [Perestyuk 1], [Simeonov 2], [Skripnik 1] и [Yang 4];

2.2. Отделно ще цитираме резултатите за диференциални уравнения с импулсни въздействия в променливи импулсни моменти (виж публикациите: [Самойленко 4], [Bainov 19], [Bainov 20], [Dishliev 1], [Dishliev 2], [Dishliev 9], [Dishliev 15], [Frigon 1], [Frigon 3], [Fu 1], [Chen 3]);

3. Моделиране и оптимизиране на процеси от науката и практиката с помощта на диференциални уравнения с импулси. Тук ще посочим изследванията, в които изучаваните процеси могат да се опишат адекватно само чрез такъв тип уравнения (виж публикациите: [Ahmad 8], [Akhmet 4], [Akhmetov 1], [Angelova 1] - [Angelova 4], [Antonov 1], [Aubin 1], [Baek 1], [Bailey 1], [Bainov 13], [Bainov 14], [Ballinger 1], [Brauer 1], [Chen 4], [Chukleva 1], [Cordova-Lepe 1], [D'onofrio 1], [Dai 1], [Dishliev 17], [Dishlieva 8], [Dou 1], [Erbe 1], [Feng 1], [Gao 1], [Gao 2], [Stamova 2], [Sun 1], [Tang 1], [Tuljapurkar 1], [Wang 2] - [Wang 5], [Xia 1], [Yang 2], [Yang 3], [Zeng 1], [Zhang 2], [Zhang 3], [Zhao 2], [Баутин 1], [Завалищин 1], [Завалищин 2], [Калитин 1] - [Калитин 3], [Кобринский 1], [Перестюк 1], [Цыпкин 1] и [Черноусько 1]).

Диференциалните уравнения с променлива структура (без импулсни въздействия) или както още се наричат с прекъсната дясна част са полезен математически апарат в теорията на управлението. Тук ще посочим следните резултати: [Алимов 1], [Козлов 1], [Матросов 1], [Матросов 2], [Рожко 1], [Ahmad 3], [Chua 1], [Chua 2], [DeCarlo 1], [Filippov 1], [Liu 3] и [Paden 1]. В следните монографии се изучават различни аспекти от теорията на системите диференциални уравнения с променлива структура: [Филиппов 1], [Андронов 1], [Бабицкий 1], [Перестюк 1] и др.

Следващите работи са посветени на фундаменталната и качествена теория на диференциалните уравнения с променливи структура и импулсни моменти: [Ahmad 4], [Ahmad 5], [Chukleva 1], [Chukleva 3] - [Chukleva 5], [Dishliev 3], [Dishlieva 4], [Dishlieva 8], [Dishlieva 10], [Dishlieva 12], [Milev 1], [Milev 2], [Hung 1], [Paden 1], [Petkova 2], [Wang 5] и [Zhang 1].

Изучаването на „скокообразно” изменящи се динамични процеси е предмет на няколко науки, от които тук ще посочим: математика, механика, фармакокинетика, популационна динамика, икономика, теория на управлението и др. При изучаването на тези прекъснати процеси използването на математически апарат под формата на моделиращи диференциални уравнения с импулсни въздействия, като правило, е задължително.

Цели и постигнати резултати

Както казахме по-горе с помощта на диференциалните уравнения с променливи структура (дясна част) и импулсни моменти се моделират процеси, които рязко (дискретно във времето) изменят състоянието си и същевременно в същите тези моменти често (макар и не задължително) се наблюдава и промяна на скоростта на развитие.

Основните цели и постигнатите резултати в дисертационния труд можем да разпределим в две групи.

Първата група съдържа теоретични резултати от качествената теория на диференциалните уравнения с променливи структура и импулсни моменти. Като правило резултатите се отнасят за специфични свойства на решенията на такива уравнения (характерни само за уравнения от разглежданите класове):

- отсъствие на феномена "загиване" на решенията на диференциални уравнения с променлива структура и импулсни моменти, като следствие на кондензация на моментите на външна интервенция;
- неограниченост на импулсните моменти и продължимост на решенията за импулсни уравнения;
- равномерно финално ограничени решения на диференциални уравнения с променливи структура и импулсни моменти;
- непрекъсната зависимост на решенията на разглежданите уравнения относно: началната точка, десните страни, импулсните въздействия, импулсните моменти и др.;
- орбитална Хаусдорфова зависимост на решенията на импулсни диференциални уравнения относно началната точка и разликата между последователните импулсни моменти;
- равномерна устойчивост на решенията на системи уравнения с импулсни въздействия относно началното условие при произволни импулсни моменти;
- асимптотическа устойчивост на ненулевите решения на системи уравнения с променливи структура и импулсни моменти;
- Орбитална хаусдорфова устойчивост на решенията на автономни диференциални уравнения с променливи моменти на импулси;
- достижими и тотално достижими множества за решенията на диференциални уравнения без импулси;
- съществуване на периодични решения;
- оптимални решения (в определен конкретен смисъл) на решенията на уравнения с импулсни въздействия и др.

При теоретичните изследвания, проведени в дисертацията, задължително се спазват правилата:

1. Новите специфични понятия се дефинират с помощта на нарочни дефиниции. Ако е необходимо се изказват хипотези, обвързващи тези понятия с реалността. Пак при необходимост се формулират твърдения, които са заимствани от други автори. Надлежно е съобщено първоизточника на резултатите във всяка глава;
2. Условията са лесно проверяеми и формулирани точно. Няма съмнение в техния смисъл;
3. Твърденията са подробно доказани (на места елементите на доказателствата са повече от необходимото). Смисълът и същността на основните теореми във всяка глава е допълнително обяснен с помощта на забележки. При наличие на дълги доказателства, същите са раздробени на отделни части.
4. Основните математически методи, използвани в дисертацията, са методите на реалния математически анализ, основните теореми за съществуване и единственост на решенията на обикновените диференциални уравнения, неподвижни точки на оператори, метод на сравненията, метод на Ляпунов и негови модификации (като например използването на редици от функции на Ляпунов) и др.

Втората група от постигнати резултати е свързана с адекватното описание (математически модели) на реални обекти с помощта на дефинираните по-горе класове уравнения. Обект на изучаване е динамиката на няколко типа процеси, които са подложени на дискретни външни интервенции и смяна на скоростта на развитие:

- обобщен математически модел на Gompertz с променливи скорост на развитие и импулсни въздействия в променливи моменти;
- обобщен математически модел на Verhulst с импулсни въздействия;
- обобщен математически модел на Lotka-Volterra с импулсни въздействия;
- обобщен математически модел на Miller с импулси;
- трептене на материална точка;
- математически модел от фармакокинетиката, описващ динамиката на лекарствената концентрация в кръвта на пациент при променлива скорост на разграждане и импулсно внасяне на лекарствено средство;
- моделно уравнение на съхранение на информацията;
- моделно уравнение на съхранение на информацията при кратковременни дискретни обучения;
- моделно уравнение на съхранение на информацията при минимални допустими стойности и др.

Във всички предложени модели са спазени следните изисквания:

1. Представените и изучаваните тук математически модели са обобщения на съществуващи, известни в научната литература модели на реални обекти и свързаните с тях процеси. Представените примери са принципиални, а не числови реализации;
2. Обобщенията на изучаваните модели се изразяват в наличието (допускането) на кратковременни външни импулсни въздействия, които се отразяват в „скокообразно“

изменение както на количествата на моделирания обект, така и на скоростта на неговото изменение;

3. Намерени са достатъчни условия, които гарантират определени качества на динамиката на количествата на моделирания обект. Такива качества например са съществуване на решенията, неограничена продължимост, непрекъсната зависимост от някои от параметрите на модела, устойчивост по тези параметри, периодичност на решенията, оптимизационни свойства и др. Разглежданите конкретни специфични качества не са изучавани от други автори;
4. Изследванията на качествата на изменение на моделираните обекти са възможни да се реализират успешно само чрез диференциални уравнения с променлива структура и импулсни въздействия в нефиксирани моменти;
5. Освен това, разглежданията на изучаваните качества на динамиката на обектите, не е възможно да се осъществят без въвеждане на нови понятия и доказване на съответни нови теореми. Тези понятия и теореми задължително са въведени и получени с участието на автора;
6. Както казахме по-горе, теоретичните резултати в дисертационния труд са приложени при изучаването на динамиката на модели. Качествата на решенията на моделите се гарантират чрез добавяне на допълнителни ограничения върху техните параметри;
7. Като правило, ограниченията са естествени и лесно проверяеми.
8. Тълкуване на резултатите в термините на моделите е важна част от проведените изследвания. Целта е да се обосноват и посочат точните тълкувания на резултатите.

Още веднъж изрично ще подчертаем, че проведените изследвания на свойствата на моделите са възможни само благодарение на предходните теоретични резултати в този дисертационен труд.

Една от второстепенните цели е още веднъж да се обоснове необходимостта от задълбочено изучаване на диференциалните уравнения с променлива структура и импулсни въздействия във фиксирани и променливи моменти.

Преглед на дисертацията

Същинската част на представеното научно изследване е разпределено в 21 глави. Всяка от главите съдържа по няколко параграфа.

Глава 1. Изучаваме някои качества на решенията на нелинейно неавтономно обикновено диференциално уравнение с променлива структура и импулсни моменти от клас Б3. Намерени са достатъчни условия за равномерно финално ограничение на решенията. Тези резултати се получават при използване на подходящ вариант на втория метод на Ляпунов.

Основен обект на изследване е следната начална задача за нелинейни неавтономни обикновени диференциални уравнения с променлива структура и импулси в нефиксирани моменти:

$$\frac{dx}{dt} = f_i(t,x), \quad \varphi_i(x(t)) \neq 0, \; t_{i-1} < t < t_i, \tag{1.1}$$

$$\varphi_i(x(t_i)) = 0, \; i = 1,2,\ldots, \tag{1.2}$$

$$x(t_i+0) = x(t_i) + I_i(x(t_i)), \tag{1.3}$$

$$x(t_0) = x_0. \tag{1.4}$$

Дефиниция 1.1. Ще казваме, че решенията на системата диференциални уравнения с променливи структура и импулсни моменти (1.1), (1.2), (1.3) са:

- ограничени, ако

$$\left(\forall t_0 \in R^+\right)\left(\forall \alpha = const > 0\right)\left(\exists \beta = \beta(t_0,\alpha) > 0\right):$$
$$\left(\forall x_0 \in R^n, \|x_0\| < \alpha\right) \Rightarrow \|x(t;t_0,x_0)\| < \beta, \; t \geq t_0 \;;$$

- равномерно ограничени, ако

$$\left(\forall t_0 \in R^+\right)\left(\forall \alpha = const > 0\right)\left(\exists \beta = \beta(\alpha) > 0\right):$$
$$\left(\forall x_0 \in R^n, \; \|x_0\| < \alpha\right) \Rightarrow \|x(t;t_0,x_0)\| < \beta, \; t \geq t_0.$$

- квази-равномерно финално ограничени, ако

$$\left(\exists \beta = const > 0\right)\left(\forall \alpha = const > 0\right)\left(\exists T = T(\alpha) > 0\right):$$

$$\left(\forall x_0 \in R^n,\ \|x_0\| < \alpha\right) \Rightarrow \left\|x(t;t_0,x_0)\right\| < \beta,\ t \ge t_0 + T;$$

- равномерно финално ограничени, ако решенията са равномерно ограничени и квази-равномерно финално ограничени.

Дефиниция 1.2. Ще казваме, че е зададена редица от скаларни частично непрекъснати функции на Ляпунов:

$$\left\{V_i,\ V_i : R^+ \times R^n \to R^+,\ i = 1,2,...\right\},$$

съответна на системата диференциални уравнения с променливи структура и импулсни моменти (1.1), (1.2), (1.3), ако:

1. $V_i \in C\left[R^+ \times R^n \setminus \Phi_i, R^+\right],\ i = 1,2,...;$
2. $V_i(t,0) = 0,\ \ t \in R^+,\ \ i = 1,2,...;$
3. За всяка точка $\left(t, x_{\Phi_i}\right) \in R^+ \times \Phi_i$ и всяко $i = 1,2,...$ съществуват границите:

$$\lim_{\substack{x \to x_{\Phi_i},\ \Phi_i(x) < 0, \\ (t,x) \in R^+ \times R^n}} V_i(t,x) = V_i\left(t, x_{\Phi_i} - 0\right) = V_i\left(t, x_{\Phi_i}\right),$$

$$\lim_{\substack{x \to x_{\Phi_i},\ \Phi_i(x) > 0, \\ (t,x) \in R^+ \times R^n}} V_i(t,x) = V_i\left(t, x_{\Phi_i} + 0\right).$$

Ще отбележим, че в общия случай е изпълнено

$$V_i\left(t, x_{\Phi_i}\right) = V_i\left(t, x_{\Phi_i} - 0\right) \ne V_i\left(t, x_{\Phi_i} + 0\right).$$

Въвеждаме следните условия:

H1.1. Функциите $f_i \in C\left[R^+ \times R^n, R^n\right],\ i = 1,2,....$

H1.2. Съществуват константи $C_{f_i} > 0$ такива, че

$$\left(\forall (t,x) \in R^+ \times R^n\right) \Rightarrow \left\|f_i(t,x)\right\| \le C_{f_i},\ i = 1,2,....$$

H1.3. Функциите $\varphi_i \in C^1\left[R^n, R\right],\ i = 1,2,....$

H1.4. Съществуват константи $C_{grad\varphi_i} > 0$ такива, че

$$\left(\forall x \in R^n\right) \Rightarrow \left\|grad\varphi_i(x)\right\| \le C_{grad\varphi_i}, i = 1,2,....$$

H1.5. Функциите $I_i \in C\left[R^n, R^n\right],\ i = 1,2,....$

H1.6. Съществуват константи $C_{\varphi_{i+1}(Id+I_i)} > 0$ такива, че

$$\left(\forall x \in \Phi_i\right) \Rightarrow \left|\varphi_{i+1}\left((Id + I_i)(x)\right)\right| = \left|\varphi_{i+1}\left(x + I_i(x)\right)\right| \ge C_{\varphi_{i+1}(Id+I_i)},\ i = 1,2,....$$

H1.7. Валидни са неравенствата:

$$\varphi_i\left((Id + I_{i-1})(x)\right).\left\langle grad\varphi_i(x), f_i(t,x)\right\rangle < 0,\quad (t,x) \in R^+ \times R^n,\ i = 1,2,...,$$

където $I_0 \equiv Id$.

H1.8 . Редът $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_{\varphi_i(Id+I_{i-1})}}{C_{grad\varphi_i}.C_{f_i}}$ е разходящ.

H1.9. Съществуват константи $C_{\langle grad\varphi_i, f_i\rangle} > 0$ такива, че

$$\left(\forall (t,x) \in R^+ \times R^n\right) \Rightarrow \left|\left\langle grad\varphi_i(x), f_i(t,x)\right\rangle\right| \ge C_{\langle grad\varphi_i, f_i\rangle},\ \ i = 1,2,....$$

H1.10. За всяка точка $(t_0, x_0) \in R^+ \times R^n$ и за всяко $i = 1,2,...$ решението на началната задача

$$\frac{dx}{dt} = f_i(t,x),\ \ x(t_0) = x_0$$

съществува и е единствено за $t \ge t_0$.

H1.11. Съществува константа $C_I > 0$ такава, че

$$\left(\forall x\in R^{n}\right)\Rightarrow\left\|I_i\left(x\right)\right\|\le C_I,\ i=1,2,\dots.$$

Целта на изследванията в главата е намирането на достатъчни условия за равномерна финална ограниченост на решенията на разглежданата система (1.1), (1.2), (1.3). Условията са получени с помощта на редици от скаларни частично непрекъснати функции на Ляпунов. Основният резултат е следната теорема

Теорема 1.6. Нека е изпълнено:

1. Валидни са условията Н1.1 - Н1.11 и условията 2.1 и 2.2 на Теорема 1.5.
2. В сила са неравенствата

$$\dot{V}_i\left(t,x\right)\le -c\left(\left\|x\right\|\right),\ \ \left(t,x\right)\in R^{+}\times\left(B^{c}_{\rho}\left(0\right)\setminus\Phi_i\right),\ i=1,2,\dots,$$

където функцията $c\in K$.

Тогава решенията на системата диференциални уравнения с променливи структура и импулсни моменти (1.1), (1.2), (1.3) са равномерно финално ограничени.

Глава 2. В тази глава е разгледан специален клас от нелинейни неавтономни обикновени диференциални уравнения с променлива структура (без импулси), които са частен случай на класа Б3. Изучава се задачата за непрекъсната зависимост на решенията при постоянно действащи смущения. Смущенията са както в началната точка на съответната начална задача, така и във всяка дясна страна на системата. Структурните промени (промените на десните страни) за различните начални задачи се извършват в различни редици от превключващи моменти. Въпреки този факт, "близост" между двете решения (изходното и смутеното) се изисква непрекъснато в целия предварително фиксиран интервал от време.

Обект на изследване е следната начална задача за нелинейни неавтономни обикновени диференциални уравнения с променлива структура:

$$\frac{dx}{dt}=f_i\left(t,x\right),\quad t_{i-1}<t\le t_i; \tag{2.1}$$

$$\chi_1<x^{n}\left(t\right)<\chi_2,\quad t_{i-1}<t<t_i; \tag{2.2}$$

$$x^{n}\left(t_i\right)=\chi_p,\quad p\in\left\{1,2\right\},\ i=1,2,\dots; \tag{2.3}$$

$$x\left(t_0\right)=x_0. \tag{2.4}$$

Контурът ∂D на фазовото пространство D се състои от двете хиперравнини:

$$D_1=\left\{x=\left(x^{1},x^{2},\dots,x^{n}\right)\in R^{n};\ x^{n}=\chi_1\right\}\ \text{ и }\ D_2=\left\{x=\left(x^{1},x^{2},\dots,x^{n}\right)\in R^{n};\ x^{n}=\chi_2\right\}.$$

Дефиниция 2.1. Ще казваме, че решенията на системата диференциални уравнения с променлива структура (2.1), (2.2), (2.3) зависят непрекъснато при постоянно действащи смущения, ако

$$\left(\forall\varepsilon>0\right)\left(\forall\left(t_0,x_0\right)\in R^{+}\times D\right)\left(\forall T=const>t_0\right)$$

$$\left(\forall f_i\in C\left[R^{+}\times D,R^{n}\right],\ i=1,2,\dots\right)$$

$$\left(\exists\delta=\delta\left(\varepsilon,t_0,x_0,T,f_i\right)>0\right):$$

$$\left(\forall t_0^{*}\in R^{+},\ \left|t_0^{*}-t_0\right|<\delta\right)\left(\forall x_0^{*}\in D,\ \left\|x_0^{*}-x_0\right\|<\delta\right)$$

$$\left(\forall f_i^{*}\in C\left[R^{+}\times D,R^{n}\right],\ \ \left\|f_i^{*}\left(t,x\right)-f_i\left(t,x\right)\right\|<\delta\quad при\ \left(t,x\right)\in R^{+}\times D\ и\ i=1,2,\dots\right)$$

$$\Rightarrow\left\|x^{*}\left(t;t_0^{*},x_0^{*}\right)-x\left(t;t_0,x_0\right)\right\|<\varepsilon,\ t_0^{\max}\le t\le T.$$

Ще използваме следните условия:

Н2.1. Функциите $f_i\in C\left[R^{+}\times D,R^{n}\right]$, $i=1,2,\dots$.

Н2.2. Съществуват константи $C_{f_i}>0$ такива, че

$$\left(\forall\left(t,x\right)\in R^{+}\times D\right)\Rightarrow\left\|f_i\left(t,x\right)\right\|\le C_{f_i},\ i=1,2,\dots.$$

Н2.3. Редът $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{C_{f_i}}$ е разходящ.

Н2.4. Валидни са неравенствата:

$$f_i^n\left(t,x^1,x^2,...,x^{n-1},\chi_p\right).f_{i+1}^n\left(t,x^1,x^2,...,x^{n-1},\chi_p\right)<0,$$

където $t\in R^+$, $\left(x^1,x^2,...,x^{n-1},\chi_p\right)\in D_p,\;\; p=1,2,\;\; i=1,2,...$.

H2.5. За всяка начална точка $\left(t_0,x_0\right)\in R^+\times D$ и за всеки номер $i=1,2,...$ началната задача

$$\frac{dx}{dt}=f_i\left(t,x\right),\quad x\left(t_0\right)=x_0$$

притежава единствено решение.

Основен резултат в работата е следната теорема.

Теорема 2.6. Нека са валидни условията H2.1 - H2.5.

Тогава решенията на системата диференциални уравнения с променлива структура (2.1), (2.2), (2.3) зависят непрекъснато при постоянно действащи смущения.

Глава 3. Изучават се диференциални уравнения с променливи импулсни моменти. Импулсните въздействия се осъществяват, когато интегралната крива на изучаваната начална задача среща някоя от предварително зададени импулсни хиперповърхнини, разположени в разширеното фазово пространство. Уравненията са от класа Б2. Предложени са условия, които отхвърлят феномена „биене“. Въведени са понятията:

- строга равномерна устойчивост на нулевото решение на диференциални уравнения без импулсни въздействия;
- равномерна устойчивост на нулевото решение на диференциални уравнения с променливи импулсни моменти относно импулсните въздействия.

Основните резултати се състоят в установяване на достатъчни условия за съществуване на споменатите по-горе качества.

Разглеждаме следната начална задача за импулсни диференциални уравнения с променливи импулсни моменти:

$$\frac{dx}{dt}=f\left(t,x\right),\quad t\neq t_i; \tag{3.1}$$

$$\Delta x\left(t\right)|_{t=t_i}=I_{j_i}\left(x\left(t_i\right)\right); \tag{3.2}$$

$$x\left(t_0\right)=x_0. \tag{3.3}$$

В моментите

$$t_1,t_2,...,\quad t_1<t_2<...,$$

и само в тях интегралната крива на задачата (3.1), (3.2), (3.3) среща някоя от хиперповърхнините

$$\sigma_i:\; t=\tau_i\left(x\right),\; i=1,2,..., \tag{3.4}$$

където функциите $\tau_i:D\to R^+$.

По-нататък ще използваме условията:

H3.1. Функцията $f\in C\left[R^+\times D,R^n\right]$ и е локално Липшицова относно променливата x в областта D с константа на Lipschitz, която не зависи от t.

H3.2. Съществува константа $M>0$ такава, че

$$\left(\forall\left(t,x\right)\in R^+\times D\right)\;\Rightarrow\;\left\|f\left(t,x\right)\right\|\le M.$$

H3.3. За всяка начална точка $\left(t_0,x_0\right)\in R^+\times D$ решението на задачата без импулсни въздействия (3.1), (3.3) не напуска областта D при $t\ge t_0$.

H3.4. Функциите $\tau_i,\;\; i=1,2,...,$ са Липшицови по аргумента x в областта D със съответни константи $L_i<\dfrac{1}{M}$.

H3.5. Изпълнени са неравенствата

$$0<\tau_1\left(x\right)<\tau_2\left(x\right)<...,\quad x\in D.$$

H3.6. Съществува константа $\Delta>0$ такава, че $\left(Id+I_i\right):D\to D\setminus B_\Delta\left(\partial D\right),\; i=1,2,...$.

H3.7. $\lim\limits_{i\to\infty}\tau_i\left(x\right)=\infty$ равномерно относно $x\in D$.

H3.8. Съществува константа $d>0$ такава, че

$(\forall x \in D)(\forall i=1,2,\ldots) \Rightarrow \tau_i(x) > \tau_i(x+I_i(x))+d$.

Н3.9. $f(t,0)=0,\ \ t \in R^+,\ 0 \in D$.

Н3.10. $I_i(0)=0,\ \ i=1,2,\ldots$.

Дефиниция 3.2. Ще казваме, че нулевото решение на системата (3.1), (3.2) е равномерно устойчиво относно импулсните въздействия, ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0):$$
$$(\forall (t_0, x_0) \in R^+ \times (B_\delta \cap D))$$
$$\left(\forall I_i^* : D \to R^n,\ \ \left\| I_i^*(x) - I_i(x) \right\| < \delta,\ x \in D,\ i=1,2,\ldots\right)$$
$$\Rightarrow \left\| x_{I^*}(t, t_0, x_0) \right\| < \varepsilon,\ \ t \ge t_0.$$

Ще припомним следната класическа дефиниция, отнасяща се до системи диференциални уравнения без импулсни въздействия.

Дефиниция 3.3. Ще казваме, че нулевото решение на системата (3.1) е равномерно устойчиво относно началното условие, ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0):$$
$$(\forall (t_0, x_0) \in R^+ \times (B_\delta \cap D))$$
$$\Rightarrow \left\| x(t, t_0, x_0) \right\| < \varepsilon,\ \ t \ge t_0.$$

В горната дефиниция за всяко $\varepsilon > 0$ съответстват безбройно много константи $\delta > 0$. Освен това, за всяко δ, съответстващо на ε имаме $\delta \le \varepsilon$. Отсега нататък чрез $\delta(\varepsilon)$ ще означаваме точната горна граница на всички δ, които удовлетворяват Дефиниция 3.3. За всяко $\varepsilon > 0$ конструираме числовата редица:

$$\delta_1 = \delta(\varepsilon),\ \delta_2 = \delta(\delta_1), \ldots,\ \delta_i = \delta(\delta_{i-1}), \ldots\ .$$

В сила са неравенствата:

$$\delta_1 \ge \delta_2 \ge \ldots \ge \delta_i \ge \delta_{i+1} \ge \ldots \ge 0\,.$$

Следователно редицата $\delta_1, \delta_2, \ldots$ е сходяща. Да означим с $\delta^* = \delta^*(\varepsilon)$ нейната граница.

Дефиниция 3.4. Ще казваме, че нулевото решение на системата (3.1) е строго равномерно устойчиво относно началното условие, ако

$$(\forall \varepsilon > 0) \Rightarrow (\delta^*(\varepsilon) > 0).$$

По-нататък със символа $\varphi \uparrow (\downarrow)$ при $t \in T$ ще бележим факта, че функцията $\varphi = \varphi(t)$ е монотонно растяща (намаляваща) в множеството T.

Достатъчни условия за строга равномерна устойчивост на нулевото решение се съдържат в следната теорема.

Теорема 3.5. Нека са валидни следните условия:

1. Нулевото решение на системата (3.1) е равномерно устойчиво относно началното условие.
2. За функцията $\varphi(t) = \left\| x(t; t_0, x_0) \right\|$ е изпълнено

$$(\exists \theta = const > 0) : (\forall (t_0, x_0) \in R^+ \times (B_\theta \cap D)) \Rightarrow \varphi \downarrow \text{ при } t \ge t_0\,.$$

Тогава нулевото решение на системата (3.1) е строго равномерно устойчиво относно началното условие.

Основните резултати се съдържат в следните две теореми:

Теорема 3.7. Нека са изпълнени следните условия:

1. Валидни са условията Н3.1 - Н3.10.
2. Нулевото решение на системата (3.1) е строго равномерно устойчиво.
3. Съществува константа $\omega > 0$, такава че

$$\left\| x + I_i(x) \right\| \le \frac{\|x\|}{1+\omega},\ \ \ x \in D,\ \ i=1,2,\ldots.$$

Тогава нулевото решение на системата (3.1), (3.2) е равномерно устойчиво относно импулсните въздействия.

Теорема 3.8. Нека са изпълнени следните условия:

1. Валидни са условията Н3.1 - Н3.10.
2. Нулевото решение на системата (3.1) е равномерно Липшицово устойчиво с константа G.
3. Съществува константа $\omega > 0$, такава че

$$\left\| x + I_i\left(x\right) \right\| \le \frac{\left\| x \right\|}{G+\omega}, \quad x \in D, \;\; i = 1, 2, \dots .$$

Тогава нулевото решение на системата (3.1), (3.2) е равномерно устойчиво относно импулсните въздействия.

Глава 4. В тази глава изследваме семейство параметрични криви, които са непрекъснати отляво. Допустимо е кривите да притежават няколко (или изброимо много) точки на прекъсване от първи род. Тъкмо на това семейство криви принадлежат и траекториите на диференциалните уравнения с променливи импулсни моменти. Получена е горна оценка на Хаусдорфовото разстоянието между две произволни криви от описаното семейство. Оценките са полезни в бъдещите изследвания, свързани с орбиталната Хаусдорфова непрекъсната зависимост и устойчивост на решенията на диференциални уравнения с променливи импулсни моменти.

Доказани са следните по-важни теореми:

Теорема 4.4. Нека множествата $A_1, A_2, \dots, A_k, B_1, B_2, \dots, B_k \subset R^n$ са ограничени.

Тогава

$$\rho_H\left(A_1 \cup A_2 \cup \dots A_k,\; B_1 \cup B_2 \cup \dots B_k\right) \le \max\left\{\rho_H\left(A_1, B_1\right), \rho_H\left(A_2, B_2\right), \dots, \rho_H\left(A_k, B_k\right)\right\},$$

където $\rho_H\left(A, B\right)$ е Хаусдорфовото разстояние между множествата A и B.

Нека функциите $g,\; g^* : R^+ \to R^n$ и константите $T_0, T_1, T_0^*, T_1^* \in R^+$. Въвеждаме параметричните криви:

$$\gamma\left[T_0, T_1\right] = \begin{cases} \left\{g\left(t\right);\, T_0 \le t \le T_1\right\}, & T_0 \le T_1; \\ \varnothing, & T_0 > T_1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \gamma^*\left[T_0^*, T_1^*\right] = \begin{cases} \left\{g^*\left(t\right);\, T_0^* \le t \le T_1^*\right\}, & T_0^* \le T_1^*; \\ \varnothing, & T_0^* > T_1^*. \end{cases}$$

Валидни са следните дефиниционни равенства, отнасящи се съответно за Евклидовото, Хаусдорфовото и равномерното разстояния между кривите $\gamma^*\left[T_0^*, T_1^*\right]$ и $\gamma\left[T_0, T_1\right]$:

$$\rho_E\left(\gamma^*\left[T_0^*, T_1^*\right], \gamma\left[T_0, T_1\right]\right) = \inf\left\{\inf\left\{\rho\left(g^*\left(t^*\right),\, g\left(t\right)\right),\; T_0^* \le t^* \le T_1^*\right\},\; T_0 \le t \le T_1\right\};$$

$$\begin{aligned} &\rho_H\left(\gamma^*\left[T_0^*, T_1^*\right], \gamma\left[T_0, T_1\right]\right) \\ &\quad = \max\Big\{\sup\left\{\inf\left\{\rho\left(g^*\left(t^*\right), \mathrm{g}\left(t\right)\right),\; T_0^* \le t^* \le T_1^*\right\},\; T_0 \le t \le T_1\right\}, \\ &\qquad\quad \sup\left\{\inf\left\{\rho\left(g^*\left(t^*\right), \mathrm{g}\left(t\right)\right),\; T_0 \le t \le T_1\right\},\; T_0^* \le t^* \le T_1^*\right\}\Big\}; \end{aligned}$$

$$\rho_R\left(\gamma^*\left[T_0, T_1\right], \gamma\left[T_0, T_1\right]\right) = \sup\left\{\rho\left(g^*\left(t\right), \mathrm{g}\left(t\right)\right),\; T_0 \le t \le T_1\right\}.$$

Теорема 4.8. Нека:

1. Функциите $g, g^* : R^+ \to R^n$ и са непрекъснати отляво в дефиниционното множество.
2. Валидно е неравенството $T_0^{\max} = \max\left\{T_0, T_0^*\right\} \le \min\left\{T_1, T_1^*\right\} = T_1^{\min}$.

Тогава е в сила оценката:

$$\begin{aligned} &\rho_H\left(\gamma^*\left(T_0^*, T_1^*\right], \gamma\left(T_0, T_1\right]\right) \\ &\quad \le \max\Big\{\rho_R\left(\gamma^*\left(T_0^{\max}, T_1^{\min}\right], \gamma\left(T_0^{\max}, T_1^{\min}\right]\right), \\ &\qquad\quad \rho_H\left(\mathrm{g}\left(T_0+0\right), \gamma^*\left(T_0^*, T_0\right]\right),\; \rho_H\left(\mathrm{g}^*\left(T_0^*+0\right), \gamma\left(T_0, T_0^*\right]\right), \\ &\qquad\quad \rho_H\left(\mathrm{g}\left(T_1\right), \gamma^*\left(T_1, T_1^*\right]\right),\; \rho_H\left(\mathrm{g}^*\left(T_1^*\right), \gamma\left(T_1^*, T_1\right]\right)\Big\}. \end{aligned}$$

Глава 5. В тази глава изследваме едно семейство диференциални уравнения с импулсни моменти от клас Б1. Специфичното тук е, че разликата между всеки два последователни импулсни моменти е равна на предварително зададена фиксирана положителна константа. Освен това, за различните решения споменатата разлика е различна. Използването (по-точно адекватността) на

Хаусдорфово разстояние между траекториите на различни решения (в случая, когато редиците от импулсни моменти на сравняваните решения не съвпадат) е обосновано в предходната глава. Тук въвеждаме понятието орбитална Хаусдорфова непрекъсната зависимост по отношение на разликата между импулсните моменти на решенията на диференциалните уравнения от разглеждания клас. Установени са достатъчните условия, при които тази специфична ново-въведена непрекъсната зависимост е валидна.

Обект на изследване е следната начална задача за импулсни диференциални уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x),\ t_{i-1} < t \le t_i = t_{i-1} + d; \tag{5.1}$$

$$x(t_i + 0) = x(t_i) + I_i(x(t_i)),\ i = 1,2,...; \tag{5.2}$$

$$x(t_0) = x_0. \tag{5.3}$$

Ще предполагаме, че са изпълнени условията:

H5.1. Функцията $f \in C\left[R^+ \times D,\ R^n\right]$.

H5.2. За всяка точка $(t_0, x_0) \in R^+ \times D$ задачата без импулси (5.1), (5.3) притежава единствено решение, дефинирано при $t \in R^+$.

H5.3. Съществува положителна константа C^f такава, че

$$\left(\forall (t,x) \in R^+ \times D\right) \Rightarrow \ \left\| f(t,x) \right\| \le C^f.$$

H5.4. Функциите $I_i \in C\left[D,\ R^n\right]$ и $(Id + I_i) : D \to D,\ i = 1,2,\ldots$.

Валидни са дефиниционните равенства:

$$\chi(T_1, T_2] = \begin{cases} \left\{ x(t; t_0, x_0\ );\ T_1 < t \le T_2 \right\},\ T_1 < T_2; \\ \varnothing,\ \ T_1 \ge T_2, \end{cases}$$

$$\chi^*\left(T_1^*, T_2^*\right] = \begin{cases} \left\{ x^*\left(t; t_0^*, x_0^*\ \right);\ T_1^* < t \le T_2^* \right\},\ T_1^* < T_2^*; \\ \varnothing,\ \ T_1^* \ge T_2^*. \end{cases}$$

Дефиниция 5.1. Ще казваме, че решението на задачата (5.1), (5.2), (5.3) е орбитално Хаусдорфово зависимо относно началното условие и разликата между импулсните моменти (т.е. от параметъра d), ако

$$\left(\forall (t_0, x_0) \in R^+ \times D\right)(\forall \varepsilon > 0)$$
$$\left(\forall T > t_0,\ T \ne t_i,\ i = 1,2,...\right)$$
$$\left(\exists \delta = \delta(t_0, x_0, d, \varepsilon, T) > 0\right):$$
$$\left(\forall t_0^* \in R^+,\ \left|t_0^* - t_0\right| < \delta\right)\left(\forall x_0^* \in D,\ \left\|x_0^* - x_0\right\| < \delta\right)$$
$$\left(\forall d_i^* > 0,\ \left|d_i^* - d\right| < \delta,\ i = 1,2,...\right)$$
$$\Rightarrow \rho_H\left(\chi^*\left[t_0^*, T\right], \chi[t_0, T]\right) < \varepsilon.$$

Основният е резултат е следната теорема.

Теорема 5.3. Нека са изпълнени условията H5.1–H5.4.

Тогава решението на задачата (5.1), (5.2), (5.3) е орбитално Хаусдорфово зависимо относно началната точка и разликата между импулсните моменти.

Глава 6. Основен обект на изследване в настоящата глава е клас автономни нелинейни системи диференциални уравнения с нефиксирани моменти на импулсни въздействия. Предполага се, че импулсното множество съвпада с част от хиперравнина. Уравненията са частен случай на класа Б3. За описаните по-горе уравнения са въведени термините орбитална гравитация и орбитална Хаусдорфова устойчивост по отношение на началното условие. Терминът орбитална гравитация се отнася за системи без импулси. Ще казваме, че една система диференциални уравнения притежава това качество с константа κ, ако Хаусдорфовото разстояние между две нейни произволни траектории е по-малко от κ пъти Евклидовото разстояние между тях.

Намерени са достатъчни условия, при които, ако съответната система без импулси е орбитално гравитираща, то решението на основната (изучаваната) задача с импулси е орбитално

Хаусдорфово устойчиво относно началното условие. Разгледан е класическият (без импулси) модел на Lotka-Volterra от популационната динамика. Намерени са достатъчни условия за орбитално гравитиране и за Хаусдорфова устойчивост относно началната точка.

Основен обект на изследване е следната начална задача:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \ \langle a, x(t)\rangle \neq a_0, \tag{6.1}$$

$$x(t+0) = x(t) + I(x(t)), \ \langle a, x(t)\rangle = a_0, \tag{6.2}$$

$$x(0) = x_0. \tag{6.3}$$

Траекториите на основната и смутената задача ще бележим съответно както следва:

$$\gamma(x_0;[0,\infty)) = \{x(t;x_0),\ 0 \le t < \infty\}, \text{ и } \gamma(x_0^*;[0,\infty)) = \{x(t;x_0^*),\ 0 \le t < \infty\}.$$

Решенията и траекториите на задачите без импулси означаваме съответно с:

$$X(t;x_0), \quad \Gamma(x_0;[0,\infty)), \quad X(t;x_0^*) \text{ и } \Gamma(x_0^*;[0,\infty)).$$

Дефиниция 6.1. Ще казваме, че системата (6.1) е орбитално гравитираща в областта D с константа $\kappa \ge 1$, ако:

$$(\forall x_0^*, x_0 \in D) \Rightarrow$$

$$\rho_H\left(\Gamma(x_0^*;[0,\infty)), \Gamma(x_0;[0,\infty))\right) \le \kappa.\rho_E\left(\Gamma(x_0^*;[0,\infty)), \Gamma(x_0;[0,\infty))\right)$$

Дефиниция 6.2. Ще казваме, че решението на задачата (6.1), (6.2), (6.3) е орбитално устойчиво относно началното условие, ако:

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\forall x_0 \in D)\,(\exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0):$$

$$(\forall x_0^* \in D,\ \rho_E(x_0^*, x_0) < \delta) \Rightarrow \rho_H\left(\gamma(x_0^*;[0,\infty)), \gamma(x_0;[0,\infty))\right) < \varepsilon.$$

По-нататък ще използваме следните условия:

H6.1. Функцията $f \in C[D, R^n]$.

H6.2. Съществуват положителни константи C_f и C^f такива, че за всяка точка $x \in D$ са изпълнени неравенствата:

$$C_f \le \|f(x)\| \le C^f.$$

H6.3. За всяка точка $x_0 \in D$ задачата без импулси (6.1), (6.3) притежава единствено решение, дефинирано при $t \ge 0$.

H6.4. Множеството $\alpha = \{x \in D; \langle a, x\rangle = a_0\}$, където $a = (a_1, a_2, ... a_n) \in R^n$, $\|a\| = 1$ и $a_0 \in R$, е ограничено.

H6.5. Съществува константа C_a, $0 < C_a \le 1$, такава, че за всяка точка $x \in \alpha$ е изпълнено неравенството

$$\langle a, f(x)\rangle \ge C_a \|f(x)\|.$$

H6.6. Съществува константа C_{Id+I} такава, че е валидно неравенството

$$\rho_E(\alpha, (Id+I)(\alpha)) \ge C_{Id+I} > 0.$$

H6.7. Съществува положителна константа C_I, такава, че за всеки две точки $x', x'' \in \alpha$ е изпълнено неравенството

$$\rho_E(x' + I(x'), x'' + I(x'')) \le C_I.\rho_E(x', x'').$$

Основен резултат е следната теорема.

Теорема 6.2. Нека:

1. Изпълнени са условията H6.1 - H6.7.
2. Системата (6.1) е орбитално гравитираща в областта D с коефициент $\kappa \ge 1$.
3. Валидно е неравенството

$$C_I < \frac{C_a}{\kappa(1 + C_a)}.$$

Тогава за всяка начална точка $x_0 \notin \alpha$ решението на задачата (6.1), (6.2), (6.3) е орбитално Хаусдорфово устойчиво относно началното условие.

Глава 7. Изследват се нелинейни неавтономни системи обикновени диференциални уравнения с променливи структура и импулсни моменти от клас Б3. Възможно е импулсните моменти $t_1, t_2, \ldots$ да притежават точка на сгъстяване T. Основната цел в тази глава е да се изследват решенията, които не са продължими до безкрайност, поради неограничения брой импулси, които трябва да се осъществят за ограничен период от време. В тази ситуация казваме, че решенията „трептят" или още, че са „загиващи" поради импулсните въздействия. Посочени са достатъчни условия за загиване на решенията.

Основен обект на изследване е следната начална задача за нелинейни неавтономни обикновени диференциални уравнения с променлива структура и импулси:

$$\frac{dx}{dt} = f_i(t,x), \quad \varphi_i(x(t)) \neq 0, \; t_{i-1} < t < t_i, \tag{7.1}$$

$$\varphi_i(x(t_i)) = 0, \; i = 1,2,\ldots, \tag{7.2}$$

$$x(t_i+0) = x(t_i) + I_i(x(t_i)), \tag{7.3}$$

$$x(t_0) = x_0. \tag{7.4}$$

Нека интервалът $J(t_0, x_0, f)$ е максималният интервал на съществуване на решението на задачата (7.1), (7.2), (7.3), (7.4)

Дефиниция 7.2. Ще казваме, че решенията на системата (7.1), (7.2), (7.3) загиват поради импулсните въздействия, ако:

1. Изпълнено е

$$(\forall t_0 \geq 0)(\forall x_0 \in D)(\forall i = 1,2,\ldots)$$
$$\Rightarrow J(t_0, x_0, f_i) = [t_0, \infty);$$

2. Имаме

$$(\forall t_0 \geq 0)(\forall x_0 \in D)$$
$$\left(\exists I_1 = I_1(t_0,x_0),\; I_2 = I_2(t_0,x_0), \ldots; \; I_1, I_2, \ldots : D \to R^n\right)$$
$$\left(\exists t^0 = t^0(t_0, x_0, I_1, I_2, \ldots) = const \in R, \; t^0 > t_0\right):$$
$$J(t_0, x_0, f) = \left[t_0, t^0\right).$$

Въвеждаме следните условия:

H7.1. Функциите $f_i \in C\left[R^+ \times D, R^n\right]$, $i = 1,2,\ldots$.

H7.2. Функциите $\varphi_i \in C^1[D, R]$, $i = 1,2,\ldots$.

H7.3. Функциите $I_i \in C\left[\Phi_i, R^n\right]$ и $(Id + I_i) : \Phi_i \to D$, $i = 1,2,\ldots$.

H7.4. Валидни са неравенствата:

$$\varphi_i((Id + I_{i-1})(x)).\langle grad\varphi_i(x), f_i(t,x)\rangle < 0, \; (t,x) \in R^+ \times D, \; i = 1,2,\ldots,$$

където $I_0(x) = 0, \; x \in D$.

H7.5. Съществуват константи $C_{\langle grad\varphi_i, f_i\rangle} > 0$ такива, че

$$(\forall (t,x) \in R^+ \times D) \Rightarrow \left|\langle grad\varphi_i(x), f_i(t,x)\rangle\right| \geq C_{\langle grad\varphi_i, f_i\rangle}, \; i = 1,2,\ldots.$$

H7.6. За всяка точка $(t_0, x_0) \in R^+ \times D$ и за всяко $i = 1,2,\ldots$ решението на началната задача (7.7) съществува и е единствено за $t \geq t_0$.

H7.7. Съществуват константи $C_{\varphi_i} > 0$ такива, че

$$(\forall x \in \Phi_i) \Rightarrow \left|\varphi_{i+1}((Id + I_i)(x))\right| \leq C_{\varphi_{i+1}}, \; i = 1,2,\ldots.$$

H7.8. Редът $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_{\varphi_{i+1}}}{C_{\langle grad\varphi_{i+1}, f_{i+1}\rangle}}$ е сходящ.

Основният резултат в главата е следната теорема.

Теорема 7.4. Нека са изпълнени условията H7.1 - H7.8.

Тогава решенията на системата (7.1), (7.2), (7.3) загиват поради импулсните въздействия.

Глава 8. Изучаваме диференциални уравнения с променливи структура и импулсни моменти. Предполагаме, че решенията загиват (не са продължими от известно място нататък) по причина на импулсните въздействия. Както казахме по-горе, при тази ситуация импулсните моменти притежават точка на сгъстяване. При диференциалните уравнения с импулсни въздействия освен традиционните външни смущения, свързани например с началното условие и десните страни, са допустими и специфични, характерни само за тези уравнения, смущения. Тук се изследва специфична непрекъсната зависимост, която се отнася до смущения в превключващите множества (функции). Основната цел на изследванията в главата е да се установи, че за всеки затворен интервал, който се съдържа в максималния интервал на съществуване на загиващото решение на началната задача, това решение зависи непрекъснато относно началните условия и превключващите функции.

Обект на изследване е начална задача за нелинейни неавтономни обикновени диференциални уравнения с променлива структура и импулси в нефиксирани моменти:

$$\frac{dx}{dt} = f_i(t,x), \quad \varphi_i\left(x(t)\right) \neq 0, \; t_{i-1} < t < t_i, \tag{8.1}$$

$$\varphi_i\left(x(t_i)\right) = 0 \,, \; i = 1,2,\ldots, \tag{8.2}$$

$$x(t_i+0) = x(t_i) + I_i\left(x(t_i)\right), \tag{8.3}$$

$$x(t_0) = x_0 \,. \tag{8.4}$$

Дефиниция 8.2. Ще казваме, че загиващото решение $x(t;t_0,x_0,f,\varphi,I)$ на началната задача (8.1), (8.2), (8.3), (8.4) зависи непрекъснато:

- относно началното условие, ако $f^* = f$, $\varphi^* = \varphi$, $I^* = I$ и

$$\left(\forall \varepsilon = const > 0\right) \left(\forall \eta = const > 0\right)$$
$$\left(\forall T \in J\left(t_0,x_0,f,\varphi,I\right) \bigcap J^*\left(t_0^*,x_0^*,f,\varphi,I\right)\right)$$
$$\left(\exists \delta = \delta(\varepsilon,\eta,T,t_0,x_0) > 0\right)$$
$$\left(\exists \eta_i = \eta_i(\varepsilon,\eta,T,t_0,x_0) \geq 0, \; i = 1,2,\ldots, \; \sum_{i=1}^{\infty}\eta_i < \eta\right):$$
$$\left(\forall t_0^* \in R^+, \left|t_0^* - t_0\right| < \delta\right)$$
$$\left(\forall x_0^* \in D \bigcap B_\delta(x_0), \; \varphi_1\left(x_0^*\right) \neq 0\right)$$
$$\Rightarrow \left\| x^*\left(t;t_0^*,x_0^*,f,\varphi,I\right) - x\left(t;t_0,x_0,f,\varphi,I\right)\right\| < \varepsilon,$$
$$t \in \left[t_0^{\max}, T\right], \; \left|t - t_i\right| > \eta_i, \; i = 1,2,\ldots;$$

- при постоянно действащи смущения, ако $\left(t_0^*,x_0^*\right) = \left(t_0,x_0\right)$, $\varphi^* = \varphi$, $I^* = I$ и

$$\left(\forall \varepsilon = const > 0\right) \left(\forall \eta = const > 0\right)$$
$$\left(\forall T \in J\left(t_0,x_0,f,\varphi,I\right) \bigcap J^*\left(t_0,x_0,f^*,\varphi,I\right)\right)$$
$$\left(\exists \delta = \delta(\varepsilon,\eta,T,f) > 0\right)$$
$$\left(\exists \eta_i = \eta_i(\varepsilon,\eta,T,f) \geq 0, \; i = 1,2,\ldots, \; \sum_{i=1}^{\infty}\eta_i < \eta\right):$$
$$\left(\forall f_i^* : R^+ \times D \to R^n, \; \left\| f_i^*(t,x) - f_i(t,x)\right\| < \delta, \; (t,x) \in R^+ \times D, \; i = 1,2,\ldots\right)$$
$$\Rightarrow \left\| x^*\left(t;t_0,x_0,f^*,\varphi,I\right) - x\left(t;t_0,x_0,f,\varphi,I\right)\right\| < \varepsilon,$$

$$t \in [t_0, T],\ |t - t_i| > \eta_i,\ i = 1, 2, \dots;$$

- от превключващите функции, ако $(t_0^*, x_0^*) = (t_0, x_0),\ f^* = f,\ I^* = I$ и

$$(\forall \varepsilon = const > 0)\ (\forall \eta = const > 0)$$

$$\left(\forall T \in J(t_0, x_0, f, \varphi, I) \bigcap J^*(t_0, x_0, f, \varphi^*, I)\right)$$

$$(\exists \delta = \delta(\varepsilon, \eta, T, \varphi) > 0)$$

$$\left(\exists \eta_i = \eta_i(\varepsilon, \eta, T, \varphi) \geq 0,\ \ i = 1, 2, \dots,\ \sum\nolimits_{i=1}^{\infty} \eta_i < \eta\right):$$

$$\left(\forall \varphi_i^* : D \to R,\ \left\|\varphi_i^*(x) - \varphi_i(x)\right\| < \delta,\ \ x \in D,\ \ i = 1, 2, \dots\right)$$

$$\Rightarrow \left\| x^*(t; t_0, x_0, f, \varphi^*, I) - x(t; t_0, x_0, f, \varphi, I)\right\| < \varepsilon,$$

$$t \in [t_0, T],\ |t - t_i| > \eta_i,\ i = 1, 2, \dots;$$

- от импулсните въздействия, ако $(t_0^*, x_0^*) = (t_0, x_0),\ f^* = f,\ \varphi^* = \varphi$ и

$$(\forall \varepsilon = const > 0)\ (\forall \eta = const > 0)$$

$$\left(\forall T \in J(t_0, x_0, f, \varphi, I) \bigcap J^*(t_0, x_0, f, \varphi, I^*)\right)$$

$$(\exists \delta = \delta(\varepsilon, \eta, T, I) > 0)$$

$$\left(\exists \eta_i = \eta_i(\varepsilon, \eta, T, I) \geq 0,\ \ i = 1, 2, \dots,\ \sum\nolimits_{i=1}^{\infty} \eta_i < \eta\right):$$

$$\left(\forall I_i^* : D \to R^n,\ \left\|I_i^*(x) - I_i(x)\right\| < \delta,\ x \in D,\ i = 1, 2, \dots\right)$$

$$\Rightarrow \left\| x^*(t; t_0, x_0, f, \varphi, I^*) - x(t; t_0, x_0, f, \varphi, I)\right\| < \varepsilon,$$

$$t \in [t_0, T],\ |t - t_i| > \eta_i,\ i = 1, 2, \dots.$$

Въвеждаме условията:

H8.1. Функциите $f_i \in C\left[R^+ \times D, R^n\right]$, $i = 1, 2, \dots$.

H8.2. Функциите $\varphi_i \in C^1[D, R]$, $i = 1, 2, \dots$.

H8.3. Функциите $I_i \in C\left[\Phi_i, R^n\right]$ и $(Id + I_i) : \Phi_i \to D$, $i = 1, 2, \dots$.

H8.4. Валидни са неравенствата:

$$\varphi_i\left((Id + I_{i-1})(x)\right).\left\langle grad\varphi_i(x),\, f_i(t, x)\right\rangle < 0, \quad (t, x) \in R^+ \times D,\ i = 1, 2, \dots,$$

където $I_0(x) = 0,\ x \in D$.

H8.5. Съществуват константи $C_{\langle grad\varphi_i, f_i\rangle} > 0$ такива, че

$$\left(\forall (t, x) \in R^+ \times D\right) \Rightarrow \left|\left\langle grad\varphi_i(x),\, f_i(t, x)\right\rangle\right| \geq C_{\langle grad\varphi_i, f_i\rangle},\ i = 1, 2, \dots.$$

H8.6. За всяка точка $(t_0, x_0) \in R^+ \times D$ и за всяко $i = 1, 2, \dots$ решението на началната задача (8.7) съществува и е единствено за $t \geq t_0$.

H8.7. Съществуват константи $C_{\varphi_i} > 0$ такива, че

$$(\forall x \in \Phi_i) \Rightarrow \left|\varphi_{i+1}\left((Id + I_i)(x)\right)\right| \leq C_{\varphi_{i+1}},\ i = 1, 2, \dots.$$

H8.8. Редът $\sum_{i=1}^{\infty} \dfrac{C_{\varphi_{i+1}}}{C_{\langle grad\varphi_{i+1}, f_{i+1}\rangle}}$ е сходящ.

H8.9. Съществуват константи $C_{f_i} > 0$ такива, че

$$\left(\forall (t, x) \in R^+ \times D\right) \Rightarrow \left\| f_i(t, x)\right\| \leq C_{f_i},\ i = 1, 2, \dots.$$

H8.10. Съществуват константи $C_{Lip\varphi_i} > 0$ такива, че

$$\left(\forall x',\ x''\in D\right)\Rightarrow\left|\varphi_i\left(x'\right)-\varphi_i\left(x''\right)\right|\le C_{Lip\varphi_i}\left\|x'-x''\right\|,\ i=1,2,\dots.$$

H8.11. Съществуват константи $C_{LipI_i} > 0$ такива, че

$$\left(\forall x',\ x''\in D\right)\Rightarrow\left|I_i\left(x'\right)-I_i\left(x''\right)\right|\le C_{LipI_i}\left\|x'-x''\right\|,\ i=1,2,\dots.$$

Основният резултат в главата е следната теорема.

Теорема 8.10. Нека са изпълнени условията H8.1 - H8.11.

Тогава загиващото решение $x\left(t;t_0,x_0,f,\varphi,I\right)$ на началната задача (8.1), (8.2), (8.3), (8.4) зависи непрекъснато относно началното условие и превключващите функции.

Глава 9. Ще изследваме диференциални уравнения с променливи структура и импулсни моменти от клас Б3. Превключващите моменти, в които се осъществява смяната на структурата и импулсните въздействия върху решенията, се определят с помощта на превключващи хиперравнини, принадлежащи на фазовото пространство на системата. Основната цел на изследванията е да се намерят достатъчни условия за специфична непрекъсната зависимост на решенията на посочените по-горе диференциални уравнения. Ще уточним, че:

- решенията са загиващи заради импулсните въздействия;
- непрекъснатата зависимост е относно смущения в началните условия и импулсните въздействия;
- непрекъснатата зависимост е в произволен затворен интервал, който се съдържа в максималния интервал на съществуване на решенията.

Обект на изследване в настоящата глава е следната начална задача:

$$\frac{dx}{dt}=f_i\left(t,x\right),\ \left\langle a_i,x\left(t\right)\right\rangle\ne\alpha_i,\ t_{i-1}<t<t_i, \tag{9.1}$$

$$\left\langle a_i,x\left(t_i\right)\right\rangle=\alpha_i,\ i=1,2,\dots, \tag{9.2}$$

$$x\left(t_i+0\right)=x\left(t_i\right)+I_i\left(x\left(t_i\right)\right), \tag{9.3}$$

$$x\left(t_0\right)=x_0. \tag{9.4}$$

Ще отбележим, че превключващите множества в тази глава са хиперравнини, т.е. тук разглежданата задача е частен случай на основната задача в предходната глава.

По-нататък ще използваме следните условия:

H9.1. Функциите $f_i\in C\left[R^+\times D,R^n\right]$, $i=1,2,\dots$.

H9.2. Функциите $I_i\in C\left[\Phi_i,R^n\right]$ и $\left(Id+I_i\right):\Phi_i\to D$, $i=1,2,\dots$.

H9.3. За всяка точка $\left(t_0,x_0\right)\in R^+\times D$ и за всяко $i=1,2,\dots$ решението на началната задача (без импулси) (9.1), (9.4) съществува и е единствено за $t\ge t_0$.

H9.4. Изпълнени са равенствата $\left\|a_i\right\|=1$, $i=1,2,\dots$.

H9.5. Валидни са неравенствата:

$$\left(\left\langle a_i,\left(Id+I_{i-1}\right)\left(x\right)\right\rangle-\alpha_i\right).\left\langle a_i,f_i\left(t,x\right)\right\rangle<0,\ \left(t,x\right)\in R^+\times D,\ i=1,2,\dots,$$

където $I_0\left(x\right)=0,\ x\in D$.

H9.6. Съществуват константи $C_{\langle a_i,f_i\rangle}>0$ такива, че

$$\left(\forall\left(t,x\right)\in R^+\times D\right)\Rightarrow\left|\left\langle a_i,f_i\left(t,x\right)\right\rangle\right|\ge C_{\langle a_i,f_i\rangle},\ i=1,2,\dots.$$

H9.7. Съществуват константи $C_{a_i}>0$ такива, че

$$\left(\forall x\in\Phi_i\right)\Rightarrow\left|\left\langle a_{i+1},\left(Id+I_i\right)\left(x\right)\right\rangle-\alpha_{i+1}\right|\le C_{a_{i+1}},\ i=1,2,\dots.$$

H9.8. Редът $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{C_{a_{i+1}}}{C_{\langle a_{i+1},f_{i+1}\rangle}}$ е сходящ.

H9.9. Съществуват константи $C_{f_i}>0$ такива, че

$$\left(\forall\left(t,x\right)\in R^+\times D\right)\Rightarrow\left\|f_i\left(t,x\right)\right\|\le C_{f_i},\ i=1,2,\dots.$$

H9.10. Съществуват константи $C_{LipI_i} > 0$ такива, че

$$\left(\forall x',\ x'' \in D\right) \Rightarrow \left|I_i\left(x'\right) - I_i\left(x''\right)\right| \le C_{LipI_i} \left\|x' - x''\right\|,\ i = 1, 2, \dots .$$

Централен резултат в главата е теоремата:

Теорема 9.5. Нека са изпълнени условията H9.1 - H9.10.

Тогава загиващото решение $x\left(t; t_0, x_0, f, \varphi, I\right)$ на началната задача (9.1), (9.2), (9.3), (9.4) зависи непрекъснато относно началното условие и импулсните въздействия.

Глава 10. Основен обект на изследване са начални задачи за автономни диференциални уравнения (без импулси). Въведени са няколко варианта на понятието достижимо множество за решенията на такива системи. С помощта на достижимите множества е дефиниран клас от интегрални многообразия. Интегралните многообразия се състоят от всички траектории на системата, които пресичат достижимото множество. Изучени са основни свойства на тези многообразия. Резултатите в тази глава ще се използват по-нататък при изследванията за съществуване на периодични решения за диференциални уравнения (с импулси) от клас Б3.

Разглеждаме следната начална задача:

$$\frac{dx}{dt} = f\left(x\right),\quad x\left(0\right) = x_0 . \tag{10.1}$$

Дефиниция 10.1 [Petkova 1]. Нека е изпълнено:

1. Множествата X_0^+, $\Phi \subset G$, $X_0^+ \ne \varnothing$ и $\Phi \ne \varnothing$.

2. За всяка точка $x_0 \in X_0^+$ решението $x\left(t; x_0\right)$ на началната задача (10.1) е дефинирано и единствено в интервала $\left[0, \infty\right)$.

3. Валидно е

$$\left(\forall x_0 \in X_0^+\right)\left(\exists \theta = \theta\left(x_0\right) > 0\right):\ x\left(\theta; x_0\right) \in \Phi .$$

Тогава ще казваме, че:

- Множеството Φ е положително достижимо от множеството X_0^+ чрез системата (10.1);
- X_0^+ е положително начално множество за системата (10.1);
- Всяка точка $x_0 \in X_0^+$ е положителна начална точка (на достижимост) за системата (10.1).

По аналогия дефинираме понятията: отрицателно достижимо множество от множеството X_0^- чрез системата (10.1), отрицателно начално множество и отрицателна начална точка за системата (10.1).

Въвеждаме условията:

H10.1. Съществува константа $C_{Lip} > 0$ такава, че

$$\left(\forall x', x'' \in G\right) \Rightarrow \left\| f\left(x'\right) - f\left(x''\right)\right\| \le C_{Lip} \left\|x' - x''\right\| .$$

H10.2. За всяка точка $x_0 \in G$ решението на задачата (10.1) съществува и е единствено в R.

H10.3. Функцията $\varphi \in C^1\left[D, R\right]$ и множеството $\Phi = \left\{x \in D;\ \varphi\left(x\right) = 0\right\} \ne \varnothing$. Съществува константа $C_{\langle grad\varphi, f\rangle} > 0$ такава, че

$$\left(\forall x \in \Phi\right) \Rightarrow \left\langle grad\varphi\left(x\right), f\left(x\right)\right\rangle \ge C_{\langle grad\varphi, f\rangle} .$$

H10.4. Множеството Φ е свързано.

H10.5. Изпълнено е $\overline{\Phi} \setminus \Phi \subset \partial G$.

Валидни са следните теореми:

Теорема 10.3. Нека са изпълнени условията:

1. Валидни са условията H10.1, H10.2 и H10.3.
2. Множеството Φ е достижимо от множеството X_0^+ и точката $x_0 \in X_0^+$.

Тогава траекторията $\gamma\left(\infty, x_0\right) \subset X_0$.

Теорема 10.4. Нека са изпълнени условията:

1. Валидни са условията H10.1 - H10.4.

2. Множеството Φ е (положително) достижимо от множеството X_0^+.

3. Точката $x_0 \in \left(\partial X_0^+ \setminus \Phi\right) \cap G$.

Тогава траекторията $\gamma\left(\infty, x_0\right) \subset \left(\partial X_0 \setminus \Phi\right) \cap G$.

Подобни резултати са валидни и за множеството от отрицателни начални точки X_0^-.

Теорема 10.5. Нека са изпълнени условията H10.1 - H10.5.

Тогава $\overline{\Phi} \setminus \Phi \subset \partial X_0$.

Глава 11. Основен обект на изследване са начални задачи за автономни диференциални уравнения. Нека G е фазовото пространство на изследваното автономно диференциално уравнение и множеството $\Phi \subset G$. Ако траектория на системата стартира в момента $t_0 = 0$ от точка $x_0 \in G$ и пресича множеството Φ, то x_0 се нарича положителна начална точка на достижимост, ако аргументът на точката на пресичане е по-голям от 0. Аналогично, x_0 е отрицателна начална точка на достижимост, ако аргументът на точката на пресичане е отрицателен. Множеството Φ наричаме положително (отрицателно) множество на достижимост. Изучава се функцията на достижимост, дефинирана в началните точките на достижимост. Стойността на тази функция в началната точка x_0 е равна на времето, необходимо за достигане на множеството Φ, ако стартираме от точката x_0. В главата са изследвани някои качествени свойства (непрекъснатост, ограниченост и др.) на функцията на достижимост. Резултатите са помощни при изследванията за периодичност на решенията на уравнения от клас Б3.

Разглеждаме следната начална задача

$$\frac{dx}{dt} = f\left(x\right), \quad x\left(0\right) = x_0. \tag{11.1}$$

Въвеждаме следните условия:

H11.1. Съществува константа $C_{Lip} > 0$ такава, че

$$\left(\forall x', x'' \in G\right) \Rightarrow \left\| f\left(x'\right) - f\left(x''\right) \right\| \leq C_{Lip} \left\| x' - x'' \right\|.$$

H11.2. Съществува константа $C_f > 0$ такава, че

$$\left(\forall x \in G\right) \Rightarrow \left\| f\left(x\right) \right\| \leq C_f.$$

H11.3. За всяка точка $x_0 \in G$ решението на задачата (11.1) съществува и е единствено в R.

H11.4. Функцията $\varphi \in C^1\left[D, R\right]$ и множеството $\Phi = \left\{x \in D;\ \varphi\left(x\right) = 0\right\} \neq \varnothing$. Съществува константа $C_{\langle grad\varphi, f\rangle} > 0$ такава, че

$$\left(\forall x \in \Phi\right) \Rightarrow \left\langle grad\varphi\left(x\right), f\left(x\right)\right\rangle \geq C_{\langle grad\varphi, f\rangle}.$$

H11.5. Множеството Φ е свързано.

H11.6. Изпълнено е $\overline{\Phi} \setminus \Phi \subset \partial G$.

H11.7. Съществува константа $C_\varphi > 0$ такава, че

$$\left(\forall x \in D\right) \Rightarrow \left|\varphi\left(x\right)\right| \leq C_\varphi \rho\left(x, \Phi\right).$$

Дефиниция 11.4 [Petkova 1]. Нека е изпълнено:

1. Множествата $X_0^+, \Phi \subset G$, $X_0^+ \neq \varnothing$ и $\Phi \neq \varnothing$.

2. За всяка точка $x_0 \in X_0^+$ решението $x\left(t; x_0\right)$ на началната задача (11.1) е дефинирано и единствено в интервала $\left[0, \infty\right)$.

3. Валидно е

$$\left(\forall x_0 \in X_0^+\right)\left(\exists \theta = \theta\left(x_0\right) > 0\right) : x\left(\theta; x_0\right) \in \Phi.$$

Тогава ще казваме, че:

- Множеството Φ е положително достижимо от множеството X_0^+ чрез системата (11.1);
- Ако $X_0^+ = G$, то множеството Φ е тотално положително достижимо от множеството G чрез системата (11.1).

Дефиницията на тотално отрицателно достижимо множество е аналогична.

Дефиниция 11.6. Функцията $\Theta^{+}: X_0^{+} \to R^{+}$, която на всяка точка $x_0 \in X_0^{+}$ съпоставя положителна константа $\theta = \Theta(x_0)$, за която е изпълнено $x(\theta; x_0) \in \Phi$ и $x(t; x_0) \notin \Phi$ при $0 \le t < \theta$ се нарича функция на достижимост.

По аналогичен начин се дефинира и функцията $\Theta^{-}: X_0^{-} \to R^{-}$.

Теорема 11.4. Нека са изпълнени условията Н11.1 - Н11.7.

Тогава $\Theta^{-} \in C\left[X_0^{-}, R^{-}\right]$ и $\Theta^{+} \in C\left[X_0^{+}, R^{+}\right]$.

Теорема 11.5. Нека са изпълнени условията:

1. Валидни са условията Н11.1 - Н11.7.
2. Решенията на системата (11.1) са равномерно Липшицово устойчиви.
3. Областта X_0^{+} е изпъкнала и ограничена.

Тогава функциите Θ^{-} и Θ^{+} са ограничени съответно в X_0^{-} и X_0^{+}.

Затворената отсечка с краища точките x и y от R^n ще бележим както следва

$$\left[x, y\right] = \left\{z_\lambda \in R^n;\ \ z_\lambda = (1-\lambda)x + \lambda y,\ 0 \le \lambda \le 1\right\}.$$

Дефиниция 11.1. Ще казваме, че кривата γ е k-линейна, ако

$$\gamma = \left[x_0, x_1\right] \cup \left[x_1, x_2\right] \cup \ldots \cup \left[x_{k-1}, x_k\right] = \bigcup_{i=1,\ldots,k} \left[x_{i-1}, x_i\right].$$

С други думи, k-линейната крива се състои от k последователно свързани отсечки.

Дефиниция 11.2. Ще казваме, че областта G е k-изпъкнала, ако

$$(\forall x, y \in G)\left(\exists \gamma;\ \gamma = \bigcup_{i=1,\ldots,k} \left[x_{i-1}, x_i\right] \subset G\right):\quad x = x_0,\ \ y = x_k.$$

Дефиниция 11.3. Ще казваме, че областта G е ограничено-свързана, ако

$$(\exists l_0 = const > 0)(\forall x, y \in G)$$

$$(\exists \gamma;\ x, y \in \gamma,\ \gamma \subset G):\ l[\gamma] \le l_0.$$

В горната дефиниция със символа $l[\gamma]$ е означена дължината на кривата γ. Непосредствено се вижда, че всяка ограничено-свързана област е ограничена.

Следствие 11.2. Нека са изпълнени условията:

1. Валидни са условията Н11.1 - Н11.7.
2. Решенията на системата (11.1) са равномерно Липшицово устойчиви.
3. Областта X_0^{+} е k-изпъкнала и ограничена или X_0^{+} е ограничено-свързана.

Тогава функцията Θ^{+} е ограничена в X_0^{+}.

Следствие 11.3. Нека са изпълнени условията:

1. Валидни са условията Н11.1 - Н11.7.
2. Решенията на системата (11.1) са равномерно Липшицово устойчиви.
3. Областта X_0^{-} е k-изпъкнала и ограничена или X_0^{-} е ограничено-свързана.

Тогава функцията Θ^{-} е ограничена в X_0^{-}.

Глава 12. Изследват се автономни диференциални уравнения (без импулси). Нека G е фазовото пространство на автономното диференциално уравнение и множеството $\Phi \subset G$. Намерени са достатъчни условия, които гарантират че траекторията на всяка начална задача за изучаваното уравнение пресича (достига) множеството Φ. Тогава ще казваме, че множеството Φ е тотално достижимо.

Получените резултати намират проложение при изучаване на импулсни диференциални уравнения с променливи импулсни моменти. Нека импулсното множество съвпада с Φ. Ако множеството е тотално достижимо, това означава, че всички решения на изследваното уравнение са подложени на импулсни въздействия.

Разглеждаме следната начална задача

$$\frac{dx}{dt} = f(x),\quad x(0) = x_0. \tag{12.1}$$

Въвеждаме следните условия:

H12.1. Съществува константа $C_{Lip} > 0$ такава, че

$$\left(\forall x', x'' \in G\right) \Rightarrow \left\| f\left(x'\right) - f\left(x''\right)\right\| \le C_{Lip} \left\| x' - x''\right\|.$$

H12.2. Съществува константа $C_f > 0$ такава, че

$$\left(\forall x \in G\right) \Rightarrow \left\| f\left(x\right)\right\| \le C_f .$$

H12.3. За всяка точка $x_0 \in G$ решението на задачата (12.1) съществува и е единствено в R.

H12.4. Функцията $\varphi \in C^1\left[D, R\right]$, където областта $D \subset G$ и $\Phi = \left\{x \in D;\ \varphi\left(x\right) = 0\right\} \ne \varnothing$. Съществува константа $C_{\langle grad\varphi, f\rangle} > 0$ такава, че

$$\left(\forall x \in \Phi\right) \Rightarrow \left\langle grad\varphi\left(x\right), f\left(x\right)\right\rangle \ge C_{\langle grad\varphi, f\rangle}.$$

H12.5. Множеството Φ е свързано.

H12.6. Изпълнено е $\overline{\Phi} \setminus \Phi \subset \partial G$.

H12.7. Съществува константа $C_\varphi > 0$ такава, че

$$\left(\forall x \in D\right) \Rightarrow \left|\varphi\left(x\right)\right| \le C_\varphi \rho\left(x, \Phi\right).$$

Ще формулираме основната теорема.

Теорема 12.6. Нека са изпълнени условията:

1. Валидни са условията H12.1 - H12.7.
2. Решенията на системата (12.1) са равномерно Липшицово устойчиви.
3. Областите X_0^- и X_0^+ са k-изпъкнали и ограничени или ограничено-свързани.

Тогава множеството Φ е тотално достижимо.

Глава 13. Основен обект на изследване са автономни диференциални уравнения с променлива структура и импулсни въздействия в променливи моменти от клас Б3. При разглежданията се изискват следните предположения:

Предположение 13.1. Всяко едно от превключващите множества Φ_i, $i = 1, 2, \ldots$, е тотално положително достижимо.

Предположение 13.2. Моментите на превключване $t_1, t_2, \ldots$ $\left(0 < t_1 < t_2 < \ldots\right)$ не притежават точка на сгъстяване.

Предположение 13.3. Функциите на достижимост са непрекъснати.

Горните изисквания са дискутирани в предходните три глави на дисертацията и за всяко от предположенията са намерени достатъчни условия, които гарантират валидността му.

Обект на изследване в настоящата глава е следната начална задача за автономни диференциални уравнения с променлива структура и импулсни моменти (клас Б3):

$$\frac{dx}{dt} = f_i\left(x\right), \quad \varphi_i\left(x\left(t\right)\right) \ne 0, \text{ т.е. } t_{i-1} < t < t_i; \tag{13.1}$$

$$x\left(t_i + 0\right) = J_i\left(x\left(t_i\right)\right), \quad \varphi_i\left(x\left(t_i\right)\right) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots; \tag{13.2}$$

$$x\left(0\right) = x_0. \tag{13.3}$$

Ще използваме условията:

H13.1. Съществуват константи $C_{Lipf_i} > 0$ такива, че

$$\left(\forall x', x'' \in G\right) \Rightarrow \left\| f_i\left(x'\right) - f_i\left(x''\right)\right\| \le C_{Lipf_i} \left\| x' - x''\right\|, \ i = 1, 2, \ldots .$$

H13.2. Съществуват константи $C_{f_i} > 0$ такива, че

$$\left(\forall x \in G\right) \Rightarrow \left\| f_i\left(x\right)\right\| \le C_{f_i}, \ i = 1, 2, \ldots .$$

H13.3. За всяко $i = 1, 2, \ldots$ решенията на задачата (13.1), (13.3) съществуват и са единствени в R.

H13.4. За всяко $i = 1, 2, \ldots$ решенията на задачата (13.1), (13.3) са равномерно Липшицово устойчиви.

H13.5. Функциите $\varphi_i \in C^1\left[D_i, R\right]$. Множествата $\Phi_i = \left\{x \in D_i;\ \varphi_i\left(x\right) = 0\right\} \ne \varnothing$.

Съществуват константи $C_{\langle grad\varphi_i, f_i\rangle} > 0$ такива, че

$$\left(\forall x \in \Phi_i\right) \Rightarrow \left\langle grad\varphi_i\left(x\right), f_i\left(x\right)\right\rangle \geq C_{\langle grad\varphi_i, f_i\rangle}, \ i = 1, 2, \dots.$$

Н13.6. Множествата Φ_i, $i = 1, 2, \dots$, са свързани.

Н13.7. Изпълнени са включванията $\overline{\Phi_i} \setminus \Phi_i \subset \partial G$, $i = 1, 2, \dots$.

Н13.8. Съществуват константи $C_{\varphi_i} > 0$ такива, че

$$\left(\forall x \in D_i\right) \Rightarrow \left|\varphi_i\left(x\right)\right| \leq C_{\varphi_i}.\rho\left(x, \Phi_i\right), \ i = 1, 2, \dots.$$

Н13.9. Съществуват константи $C_{Lip\varphi_i} > 0$ такива, че

$$\left(\forall x', x'' \in G\right) \Rightarrow \left|\varphi_i\left(x'\right) - \varphi_i\left(x''\right)\right| \leq C_{Lip\varphi_i} \left\|x' - x''\right\|, \ i = 1, 2, \dots.$$

Н13.10. Съществуват константи $C_{D_{i+1}} > 0$ такива, че:

$$\left(\forall x \in \partial D_{i+1} \cap G\right) \Rightarrow \left|\varphi_{i+1}\left(x\right)\right| \geq C_{D_{i+1}}, \ i = 1, 2, \dots.$$

Н13.11. Функциите $J_i \in C\left[\Phi_i, G \setminus D_{i+1}\right]$, $i = 1, 2, \dots$.

Н13.12. Областта G е p-изпъкнала и ограничена или ограничено-свързана.

Н13.13. Редът $\sum_{i=1}^{\infty} \dfrac{C_{D_{i+1}}}{C_{f_{i+1}} C_{Lip\varphi_{i+1}}}$ е разходящ.

Дефиниция 13.3. [Dishliev 17]. Ще казваме, че решението $x\left(t; x_0\right)$ на задачата (13.1), (13.2), (13.3) зависи непрекъснато от началната точка, ако

$$\left(\forall x_0 \in G\right)\left(\forall \varepsilon = const > 0\right)$$
$$\left(\forall \eta = const > 0\right)\left(\forall T = const > 0\right)$$
$$\left(\exists \delta = \delta\left(x_0, \varepsilon, \eta, T\right) > 0\right): \left(\forall x_0^* \in G, \ \left\|x_0^* - x_0\right\| < \delta\right)$$
$$\Rightarrow \left\|x\left(t; x_0^*\right) - x\left(t; x_0\right)\right\| < \varepsilon, \ 0 \leq t \leq T, \ \left|t - t_i\right| > \eta, \ i = 1, 2, \dots.$$

Теорема 13.4. Нека са изпълнени условията Н13.1 - Н13.13.

Тогава решението на задачата (13.1), (13.2), (13.3) зависи непрекъснато от началната точка.

Теорема 13.6. Нека са изпълнени условията:

1. Валидни са условията Н13.1 - Н13.13.
2. Съществува множество H такова, че:

2.1. H е затворено и $H \subset G$;

2.2. $\left(\forall x_0 \in H\right)\left(\forall t \in R^+\right) \Rightarrow x\left(t; x_0\right) \in H$.

2.3. $\left(\exists k \in N\right)$ такова, че множеството $H \cap \Phi_k$ е изпъкнало.

3. Валидни са равенствата:

$$f_{i+k}\left(x\right) = f_i\left(x\right), \ x \in G; \ \ D_{i+k} = D_i; \ \ \varphi_{i+k}\left(x\right) = \varphi_i\left(x\right), \ x \in D_i; \ \ J_{i+k}\left(x\right) = J_i\left(x\right), \ x \in \Phi_i,$$

където $i = 1, 2, \dots$.

4. Валидно е равенството $J_k\left(x\right) = x, \ x \in \Phi_k$.

Тогава съществува начална точка $x_0 \in H \cap \Phi_k$ такава, че решението на задачата (13.1), (13.2), (13.3) е периодично с период t_k.

Доказателството за съществуване на периодично решение е осъществено с помощта на теоремата за неподвижната точка на Brouwer.

Резултатите от последните две теореми са пренесени върху линеаризирания модел с импулсни въздействия на Lotka-Volterra.

Глава 14. Представен е обобщен математически модел на съобщество от тип жертва-хищник от вида на Lotka-Volterra. Новото в този модел, което съществено изменя закона на развитие на съобществото, е в следните направления:

- Биомасата на жертвата и хищника е подложена на дискретни във времето външни въздействия. Тези въздействия са свързани с отнемане или (в редки случаи) добавяне на биомаса. Промените на количеството на биомасата се извършва моментално под формата на импулси;
- Съвместно и едновременно с въздействията върху биомасата се извършва и рязка – скокообразна промяна в скоростта на изменението на биомасите на обществото. Това се осъществява с промяна на параметрите на развитие (реално с промяна на структурата на моделиращата система).

Обобщената версия на класическия модел на Lotka-Volterra се описва с помощта на диференциални уравнения с променлва структура и импулсни моменти от клас Б3. Както казахме по-горе, моментите на импулсните смущения и моментите на прекъсване на дясната страна съвпадат. Множеството на превключване е разположено във фазовата равнина и представлява лъч с начало устойчивата неподвижна точка на системата на Lotka-Volterra.

Разглеждаме следната начална задача за системи диференциални уравнения с променливи структура и импулсни въздействия, които са в нефиксирани моменти:

$$\frac{dm}{dt} = f_i^1(m,M) = m\left(r_i^1 - q_i^1 M\right),\ \left(m(t), M(t)\right) \notin \Phi_i \Leftrightarrow t_{i-1} < t < t_i\ ; \tag{14.1}$$

$$\frac{dM}{dt} = f_i^2(m,M) = -M\left(r_i^2 - q_i^2 m\right),\ \left(m(t), M(t)\right) \notin \Phi_i \Leftrightarrow t_{i-1} < t < t_i\ ; \tag{14.2}$$

$$m(t_i + 0) = g_i\left(m(t_i)\right),\ \left(m(t_i), M(t_i)\right) \in \Phi_i\ ; \tag{14.3}$$

$$M(t_i + 0) = M_{i+1}^{00},\ \left(m(t_i), M(t_i)\right) \in \Phi_i,\ \ i = 1, 2, \ldots\ ; \tag{14.4}$$

$$m(0) = m_0, \quad M(0) = M_0\,, \tag{14.5}$$

където:

- $m = m(t) > 0$ и $M = M(t) > 0$ са биомасите на жертвата и хищника в момента $t \geq 0$;
- $\left(m_i^{00}, M_i^{00}\right) = \left(r_i^2 / q_i^2\ ,\ r_i^1 / q_i^1 \right)$;
- $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ са превключващите множества, $\Phi_i = \left\{(m,M);\ \ m > m_i^{00},\ M = M_i^{00}\right\},\ i = 1,2,\ldots;$

По-нататък чрез $m_i^{c,\max}$ и $m_i^{\mathrm{C},\max}$ ще означаваме по-големите решения съответно на уравненията

$$m - \frac{r_i^2}{q_i^2}\ln m = \frac{r_i^2}{q_i^2}\left(1 - \ln\frac{r_i^2}{q_i^2}\right) + \frac{c}{q_i^2} \quad \text{и} \quad m - \frac{r_i^2}{q_i^2}\ln m = \frac{r_i^2}{q_i^2}\left(1 - \ln\frac{r_i^2}{q_i^2}\right) + \frac{C}{q_i^2}\,.$$

Аналогично, константите $m_i^{c,\min}$ и $m_i^{\mathrm{C},\min}$ са по-малките решения на последните две уравнения. Въвеждаме следните множества:

$$\Phi_i^{c,C,\max} = \left\{(m,M);\ m_i^{c,\max} \leq m \leq m_i^{C,\max},\ \ M = M_i^{00}\right\} \subset G_i^{c,C}, \quad i = 1,2,\ldots\ ;$$

$$\Phi_i^{c,C,\min} = \left\{(m,M);\ m_i^{C,\min} \leq m \leq m_i^{c,\min},\ \ M = M_i^{00}\right\} \subset G_i^{c,C}, \quad i = 1,2,\ldots\ .$$

Ясно е, че превключващите множества

$$\Phi_i = \Phi_i^{c,C} = \Phi_i^{c,C,\max},\ \ i = 1,2,\ldots\ .$$

Въвеждаме следните условия:

H14.1. Съществува номер $k_0 \in N$, такъв че

$$r_{k_0+i}^1 = r_i^1; \quad r_{k_0+i}^2 = r_i^2; \quad q_{k_0+i}^1 = q_i^1; \quad q_{k_0+i}^2 = q_i^2, \quad i = 1,2,\ldots\ .$$

H14.2. Функциите $g_i \in C\left[\Phi_i^{c,C,\max}, R^+\right]$,

$$g_i\left(\Phi_i^{c,C,\max}\right) \subset \left\{m;\ m_{i+1}^{C,\min} < m < m_{i+1}^{c,\min}\right\}$$

и за всяко $m \in \Phi_{k_0}^{c,C,\max}$, е изпълнено

$$g_{k_0+i}(m) = g_i(m),\ \ i = 1,2,\ldots\ .$$

Използвайки теоремата на Brouwer за неподвижната точка са намерени достатъчни условия за съществуването на периодично решение.

Теорема 14.1. Нека са в сила условията H14.1 и H14.2.

Тогава системата (14.1) - (14.4) има поне едно периодично решение с начална точка (m_0, M_0), която принадлежи на $\Phi_1^{c,C,\min}$ и период $T = t_{k_0} = t_{k_0}(m_0, M_0)$.

Глава 15. Представените в главата изследвания се отнасят до създаване и изучаване на математически модел на количеството на информация в паметта. Тази информация е свързана с даден клон от човешкото познание. Създаването на модели винаги е свързано с пренебрегване на част от факторите, които оказват влияние върху изследвания обект. Тези ограничения в коментираната глава са под формата на хипотези:

- Информацията (отнасяща се до частта от човешкото познание) има количествено измерение;
- Количеството на информация има осреднен характер и е свързано с капацитета на идеализиран осреднен абстрактен индивид;
- Изменението на количеството на информация във всеки момент t е пропорционално на обема на информацията в паметта. Коефициентът на пропорционалност, който дава връзката между скоростта на изменение на информацията и нейното количество, е променлив във времето. По-точно, той е функция на $t - t_0$, т.е. на времето, което е изминало от началния момент t_0 до настоящия момент t;
- изходните данни и произтичащите от тях резултати са осреднени.

В главата е установено, че съответната моделна начална задача има вида

$$\frac{dI}{dt} = \alpha(t - t_0) I, \quad I(t_0) = I_0. \tag{15.1}$$

Тук $\alpha = \alpha(t - t_0)$ е променливия коефициент на пропорционалност, а I_0 е началното количество на информацията в паметта.

Решение на горната моделна начална задача (15.1) е функцията

$$I(t; t_0, I_0) = I_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} \alpha(\tau - t_0)\, d\tau\right).$$

Въвеждаме условията:

H15.1. Функцията $\alpha \in C\left[[0,\infty), R^-\right]$.

H15.2. $\int_0^\infty \alpha(\tau)\, d\tau = A = const < 0$.

H15.3. Изпълнено е $\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = 0$.

Дефиниция 15.1. Ще казваме, че количеството на информацията в паметта се изменя асимптотично слабо, ако

$$\left(\forall t_0 \in R^+\right)\left(\forall I_0 \in R^+\right)\left(\forall \varepsilon > 0\right)\left(\forall \Delta t > 0\right)$$
$$\left(\exists T = T(t_0, I_0, \varepsilon, \Delta t) > t_0\right):$$
$$\left(\forall t_1, t_2 > T;\ |t_2 - t_1| < \Delta t\right) \Rightarrow \left|I(t_2; t_0, I_0) - I(t_1; t_0, I_0)\right| < \varepsilon.$$

Основните резултати са формулирани в теоремата:

Теорема 15.1. Нека са валидни условията H15.1 - H15.3.

Тогава количеството на информацията:

- се изменя асимптотично слабо;
- е равномерно Липшицово устойчиво;
- е равномерно устойчиво.

Глава 16. Създаден е импулсен математически модел (от клас Б1) на изменение на количеството на информацията в паметта на абстрактен представителен индивид при наличие на дискретни „мигновени“ обучения (попълвания на информацията). Попълванията на информацията се осъществяват в планирани, предварително фиксирани кратковременни интервали от време. Продължителността на обученията е сравнително малка и може да приемем, че се извършва импулсивно. Предложени са няколко лесно проверяеми ограничения, които гарантират, че количеството на информацията зависи непрекъснато от количествата на многократните нейни попълвания.

Началната задача, моделираща динамиката на количеството на информацията в паметта при $t \ge t_0$, има вида

$$\frac{dI}{dt} = \alpha(t - t_i) I, \quad t_{i-1} < t \le t_i, \tag{16.6}$$

$$I(t_i+0)=I_i^+=\left(1+\beta\left(t_i,I(t_i)\right)\right).I(t_i),\ i=1,2,..., \tag{16.7}$$

$$I(t_0)=I_0. \tag{16.8}$$

Решението на задачата (16.6), (16.7), (16.8) се дава с формулата

$$I(t;t_0,t_1,...,I_0,\alpha,\beta)=\begin{cases} I_0\exp\left(\int_{t_0}^{t}\alpha(\tau-t_0)\,d\tau\right), & t_0\le t\le t_1; \\ I_1^+\exp\left(\int_{t_1}^{t}\alpha(\tau-t_1)\,d\tau\right), & t_1<t\le t_2; \\ .... & \\ I_i^+\exp\left(\int_{t_i}^{t}\alpha(\tau-t_i)\,d\tau\right), & t_i<t\le t_{i+1},\ i=2,3,...; \\ ...., & \end{cases}$$

където за константите $I_1^+, I_2^+,...$ са валидни равенствата:

$$I_1^+=\left(1+\beta\left(t_1,I(t_1;t_0,I_0,\alpha)\right)\right).I(t_1;t_0,I_0,\alpha);$$

$$I_i^+=\left(1+\beta\left(t_i,I(t_i;t_0,t_1,...,t_{i-1},I_0,\alpha,\beta)\right)\right).I(t_i;t_0,t_1,...,t_{i-1},I_0,\alpha,\beta),\ i=2,3,....$$

Ще използваме следните условия:

H16.1. Коефициентът $\alpha\in C\left[R^+,R^-\right]$.

H16.2. Коефициентът β удовлетворява ограниченията:

H16.2.1. Функцията β е положителна, т.е. $\beta: R^+\times R^+\to R^+$;

H16.2.2. Функцията β е Липшицова е по втория аргумент с константа $L>0$, т.е.

$$\left(\forall(t,I'),(t,I'')\in R^+\times R^+\right)\Rightarrow\left|\beta(t,I')-\beta(t,I'')\right|\le L\left|I'-I''\right|;$$

H16.2.3. Функцията β е ограничена отгоре с константа $\beta_{\max}>0$, т.е.

$$\left(\forall(t,I)\in R^+\times R^+\right)\Rightarrow\beta(t,I)\le\beta_{\max}.$$

H16.3. Импулсните моменти (моментите на дискретно приемане на информация) $t_1,t_2,...$ не притежават точка на сгъстяване, т.е. $\lim\limits_{i\to\infty}t_i=\infty$.

Дефиниция 16.1. Ще казваме, че количеството на информация в паметта зависи непрекъснато относно кратковременни дискретни попълвания, ако

$$(\forall\varepsilon>0)(\forall T>0)$$
$$(\forall t_0>0)(\forall t_1,t_2,...;\ t_0<t_1<t_2<...)(\forall I_0>0)$$
$$\left(\forall\alpha\in C\left[R^+,R^-\right]\right)(\forall\beta\in H2)$$
$$\left(\exists\delta=\delta(\varepsilon,T,t_0,t_1,...,I_0,\alpha,\beta)>0\right):$$
$$\left(\forall\beta^*\in H2;\ \left|\beta^*(t,I)-\beta(t,I)\right|<\delta,\ (t,I)\in R^+\times R^+\right)$$
$$\Rightarrow\left|I(t;t_0,t_1,...,I_0,\alpha,\beta^*)-I(t;t_0,t_1,...,I_0,\alpha,\beta)\right|<\varepsilon,\ t_0\le t\le t_0+T.$$

Теорема 16.1. Нека са валидни условията H16.1 – H16.3.

Тогава количеството на информацията зависи непрекъснато относно кратковременните дискретни попълвания.

Глава 17. Изучен е дългосрочен процес на изменение на информацията в паметта на абстрактен обобщен индивид със следните специфични особености:

- Количеството на информацията в паметта през изучавания период е не по-малко от фиксиран критичен минимум;
- Попълването на информацията се осъществява чрез последователни във времето „кратковременни и дискретни“ обучения.

Създаден е математически модел на динамиката на количеството на информацията с помощта на импулсни диференциални уравнения с променливи моменти на импулсни въздействия от клас Б3. Посочени са подходящи условия, при които количеството на информацията зависи непрекъснато от началната точка и критичния минимум на информацията.

Началната задача, моделираща динамиката на количеството на информацията в паметта при минимална стойност на информацията $I_{\min}$, има вида:

$$\frac{dI}{dt}=\alpha\left(t-t_i\right)I,\quad I\left(t\right)>I_{\min},\quad \text{т.е. } t_{i-1}<t<t_i\,; \tag{17.8}$$

$$I\left(t_i\right)=I_{\min}\,; \tag{17.9}$$

$$I\left(t_i+0\right)=\left(1+\beta\left(t_i\right)\right).I\left(t_i\right),\ i=1,2,\ldots; \tag{17.10}$$

$$I\left(t_0\right)=I_0\,. \tag{17.11}$$

За решението на задачата (17.8) - (17.11) получаваме

$$I\left(t;t_0,I_0,I_{\min},\alpha,\beta\right)=\begin{cases} I_0\exp\left(\int_{t_0}^{t}\alpha\left(\tau-t_0\right)d\tau\right), & t_0\le t\le t_1;\\ \left(1+\beta\left(t_1\right)\right)I_{\min}\exp\left(\int_{t_1}^{t}\alpha\left(\tau-t_1\right)d\tau\right), & t_1<t\le t_2;\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \left(1+\beta\left(t_i\right)\right)I_{\min}\exp\left(\int_{t_i}^{t}\alpha\left(\tau-t_i\right)d\tau\right), & t_i<t\le t_{i+1},\ i=2,3,\ldots;\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{cases}$$

Ще използваме следните условия за параметрите на задачата (17.8) - (17.11):

Н17.1. Коефициентът α удовлетворява ограниченията:

Н17.1.1. Функцията $\alpha\in C\left[R^{+},R^{-}\right]$;

Н17.1.2. Изпълнено е $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\int_0^t\alpha\left(\tau\right)d\tau\right)=-\infty$;

Н17.1.3. Функцията α е ограничена отдолу, т.е.

$$\left(\exists\alpha_{\min}=const<0\right):\left(\forall t\ge 0\right)\Rightarrow\left(\alpha\left(t\right)\ge\alpha_{\min}\right);$$

Н17.1.4. Функцията α е Липшицова с константа L_α, т.е.

$$\left(\forall t^{*},t^{**}\ge 0\right)\Rightarrow\left|\alpha\left(t^{*}\right)-\alpha\left(t^{**}\right)\right|\le L_\alpha\left|t^{*}-t^{**}\right|.$$

Н17.2. Коефициентът β удовлетворява ограниченията:

Н17.2.1. Функцията $\beta\in C\left[R^{+},R^{+}\right]$;

Н17.2.2. Функцията β е ограничена отдолу, т.е.

$$\left(\exists\beta_{\min}=const>0\right):\left(\forall t\ge 0\right)\Rightarrow\left(\beta\left(t\right)\ge\beta_{\min}\right).$$

Н17.2.3. Функцията β е Липшицова с константа L_β, т.е.

$$\left(\forall t^{*},t^{**}\ge 0\right)\Rightarrow\left|\beta\left(t^{*}\right)-\beta\left(t^{**}\right)\right|\le L_\beta\left|t^{*}-t^{**}\right|.$$

Дефиниция 17.1. Ще казваме, че количеството на информация в паметта зависи непрекъснато от началното условие и нейната критична стойност, ако

$$\left(\forall\varepsilon>0\right)\left(\forall\eta>0\right)\left(\forall T>0\right)$$
$$\left(\forall t_0>0\right)\left(\forall I_0>0\right)\left(\forall I_{\min},\ 0<I_{\min}<I_0\right)$$
$$\left(\forall\alpha\in C\left[R^{+},R^{-}\right]\right)\left(\forall\beta\in C\left[R^{+},R^{+}\right]\right)$$
$$\left(\exists\delta=\delta\left(\varepsilon,\eta,T,t_0,I_0,I_{\min},\alpha,\beta\right)>0\right):$$

$$\left(\forall t_0^*>0,\ \left|t_0^*-t_0\right|<\delta\right)\left(\forall I_0^*>0,\ \left|I_0^*-I_0\right|<\delta\right)$$
$$\left(\forall I_{\min}^*,\ 0<I_{\min}^*<I_0^*,\ \left|I_{\min}^*-I_0\right|<\delta\right)$$
$$\Rightarrow\left|I\left(t;t_0^*,I_0^*,I_{\min}^*,\alpha,\beta\right)-I\left(t;t_0,I_0,I_{\min},\alpha,\beta\right)\right|<\varepsilon,$$
при $t_0\le t\le t_0+T$ и $\left|t-t_i\right|>\eta,\ i=0,1,\dots$.

Интересни са следните две помощни теореми, които имат самостоятелен характер:

Теорема 17.1. Нека са валидни условията Н17.1.1, Н17.1.2 и Н17.2.1.

Тогава решението $I\left(t;t_0,I_0,I_{\min},\alpha,\beta\right)$ на задачата (17.8) - (17.11) достига критичната стойност $I_{\min}$ безбройно много пъти в моментите $t_1,t_2,\dots$.

Теорема 17.2. Нека са валидни условията Н17.1.1, Н17.1.2, Н17.1.3, Н17.2.1 и Н17.2.2.

Тогава моментите на дискретно приемане на информация $t_1,t_2,\dots$ не притежават точка на сгъстяване, т.е. $\lim\limits_{i\to\infty}t_i=\infty$.

Важен и централен резултат е теоремата:

Теорема 17.3. Нека са валидни условията Н17.1 и Н17.2.

Тогава количеството на информация зависи непрекъснато от началното условие и нейната критична стойност.

Глава 18. Изучава се модел, описвщ изменение на количеството на информацията в паметта при наличие на кратковременни обучения (виж модела в глава 16). Допълнително предполагаме, че импулсните моменти (моментите на попълване на информацията) са произволни, т.е. моделиращото уравнение с импули е от клас Б5. Разглеждат се два конкретни модела (решения на две начални задачи за импулсни уравнения), като различията са в:
- броя на попълванията на информацията (брой импулсни въздействия);
- моментите на попълване на информацията (импулсните моменти);
- големините на попълненията (големини на импулсните въздействия).

Сравняват се количествата на информацията в двата различни модела при достатъчно времево отдалечаване от начлния момент.

Началната задача за диференциални уравнения с импулси, която моделира динамиката на количеството на информацията в паметта, има вида:

$$\frac{dI}{dt}=\alpha_{i-1}\left(t-t_i\right)I,\quad t_{i-1}<t\le t_i; \tag{18.3}$$
$$\Delta I\left(t_i\right)=I_i,\quad i=1,2,\dots; \tag{18.4}$$
$$I\left(t_0\right)=I_0. \tag{18.5}$$

Нейното решение означаваме с $I\left(t;t_0,t_1,\dots,I_0,I_1,\dots\right)$.

Ще използваме следните условия:

Н18.1. Функциите $\alpha_{i-1},\ \ i=1,2,\dots$, са непрекъснати и приемат отрицателни стойности при $t\ge 0$.

Н18.2. Изпълнено е $\lim\limits_{t\to\infty}\alpha_{i-1}\left(t\right)=0,\ \ i=1,2,\dots$.

Н18.4. Съществуват положителни константи $I_{\min}$ и $I_{\max}$, такива, че са валидни неравенствата

$$I_1\ge \mathrm{I}_{\min},\ I_2\ge \mathrm{I}_{\min},\dots \text{ и } I_1^+\le I_{\max},\ I_2^+\le I_{\max},\dots.$$

Н18.5. Валидни са неравенствата

$$A_i\ge A_{i-1}+\ln\frac{I_{\max}}{I_{\min}},\ \ i=1,2,\dots.$$

Теорема 18.1. Нека са изпълнени са условията Н18.1 и Н18.2.

Тогава:
- за всеки краен брой импулсни въздействия i;
- за всеки две крайни редици от импулсни моменти $0<t_0^*<t_1^*<\dots<t_i^*$ и $0<t_0^{**}<t_1^{**}<\dots<t_i^{**}$;
- за всеки две крайни редици от импулсни въздействия $I_0^*>0,\ I_1^*>0,\dots,I_i^*>0$ и $I_0^{**}>0,\ I_1^{**}>0,\dots,I_i^{**}>0$,

за които е изпълнено

$$I_i^{*+} = I\left(t_i^*; t_0^*, t_1^*, ..., t_{i-1}^*, I_0^*, I_1^*, ..., I_{i-1}^*\right) + I_i^*$$
$$< I\left(t_i^{**}; t_0^{**}, t_1^{**}, ..., t_{i-1}^{**}, I_0^{**}, I_1^{**}, ..., I_{i-1}^{**}\right) + I_i^{**} = I_i^{**+}$$

съществува константа $T,\ T > \max\left\{t_i^*, t_i^{**}\right\}$, такава че за всяко $t > T$ е изпълнено

$$I\left(t; t_0^*, t_1^*, ..., t_i^*, I_0^*, I_1^*, ..., I_i^*\right) < I\left(t; t_0^{**}, t_1^{**}, ..., t_i^{**}, I_0^{**}, I_1^{**}, ..., I_i^{**}\right).$$

Теорема 18.2. Нека са изпълнени са условията H18.1 и H18.2.

Тогава:

- за всеки краен брой импулсни въздействия i;
- за всяка крайна редица от импулсни моменти $0 < t_0 < t_1 < ... < t_{i-1}$;
- за всеки два импулсни моменти t_1^* и t_i^{**}, $t_{i-1} < t_i^* < t_i^{**}$
- за всяка крайна редица от импулсни въздействия $I_0 > 0,\ I_1 > 0, ..., I_i > 0$,

съществува константа $T,\ T > t_i^{**}$, такава че за всяко $t \geq T$ е изпълнено

$$I\left(t; t_0, t_1, ...t_{i-1}, t_i^*, I_0, I_1, ..., I_i\right) > I\left(t; t_0, t_1, ...t_{i-1}, t_i^{**}, I_0, I_1, ..., I_i\right).$$

Теорема 18.3. Нека:

1. Изпълнени са условията H18.1, H18.3, H18.4 и H18.5.
2. Импулсните въздействия на задачата (18.3), (18.4), (18.5) са краен брой.

Разглеждаме две решения на задачата (18.3), (18.4), (18.5):

- $I\left(t; t_0, t_1, ...t_{i-1}, I_0, I_1, ..., I_{i-1}\right)$ с $i-1$ на брой импулсни въздействия;
- $I\left(t; t_0, t_1, ..., t_i, I_0, I_1, ..., I_i\right)$ с i на брой импулсни въздействия.

Тогава:

- за всяко i;
- за всяка крайна редица от импулсни моменти $0 < t_0 < t_1 < ... < t_i$;
- за всяка крайна редица от импулсни въздействия $I_0 > 0,\ I_1 > 0, ..., I_i > 0$,

съществува константа $T,\ T > t_i$, такава че за всяко $t \geq T$ е изпълнено

$$I\left(t; t_0, t_1, ..., t_i, I_0, I_1, ..., I_i\right) > I\left(t; t_0, t_1, ...t_{i-1}, I_0, I_1, ..., I_{i-1}\right).$$

Глава 19. Въведена е методика за приближено намиране на коефициента на съхранение на информацията в паметта на човека. Методът е реализиран в конкретен допустим тестови вариант. За целта се предвиждат провеждането и анализирането на множество тестове в подходящо избрани групи от студенти (обучаеми).

Предложен е следният алгоритъм за намиране на коефициента на съхранение на информацията:

Алгоритъм 19.2

1. Определяме броя на наблюденията n;
2. Определяме моментите на провеждане на експериментите: $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n$;
1. Определяме броя на участниците в наблюденията: $k_1, k_2, ..., k_n$;
2. Определяме относителните тегла на участниците в наблюденията:
$$\lambda_{11}, \lambda_{12}, ..., \lambda_{1k_1},\ \lambda_{21}, \lambda_{22}, ..., \lambda_{2k_2}, ...,\ \lambda_{n1}, \lambda_{n2}, ..., \lambda_{nk_n};$$
3. Определяме на частите на съхранената информация от участниците в експериментите:
$$p_{11}, p_{12}, ..., p_{1k_1},\ p_{21}, p_{22}, ..., p_{2k_2}, ...,\ p_{n1}, p_{n2}, ..., p_{nk_n};$$
4. Пресмятаме константите: $I_1, I_2, ..., I_n$ по формулата
$$I_i = \lambda_{i1} p_{i1} + \lambda_{i2} p_{i2} + ... + \lambda_{ik_i} p_{ik_i},\ i = 1, 2, ..., n; \tag{19.7}$$
5. Пресмятаме константите: $A_1 = \ln I_1,\ A_2 = \ln I_2, ...,\ A_n = I_n$;
9. За табличната функция, зададена чрез Таблица 19.2, определяме вида на апроксимиращото параметричното семейство $\varphi(a, b, ...)$

τ_1	τ_2	$\cdots$	τ_n
$A_1 = \ln I_1$	$A_2 = \ln I_2$	$\cdots$	$A_n = \ln I_n$

Табл. 19.2

9. Определяме чрез метода на най-малките квадрати функцията $A(t;a,b,...) \in \varphi(a,b,...)$ (локализираме параметрите);
10. Намираме приближението на търсената функция

$$\alpha(t;a,b,...) = \frac{d}{dt} A(t;a,b,...).$$

Глава 20. Разглеждаме развитието на изолирана популация. Дискретно и многократно (под формата на импулси) от биомасата се отнема определено предварително фиксирано количество $I_\Sigma > 0$. Очевидно става дума за популация, биомасата на която е полезна за човека. При отнеманията е възможно да се управляват следните параметри на процеса:
Параметър 1: Брой отнеманията n;
Параметър 2: Моменти на отнеманията: $t_1, t_2, ..., t_n, \quad t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$;
Параметър 3: Обеми на отнеманията: $I_1, I_2, ..., \quad I_1 > 0, I_2 > 0, ...$.

Адекватно математическо уравнение, което моделира изменението на количеството на биомасата на изолираната популация при описаните в тази глава отнемания, е модификация (обобщение) на уравнението на Verhulst. По-точно, към класическото уравнение се добавят и импулсни въздействия от клас Б4. Естествено е (като се има предвид практиката) да се изискват следните ограничения:

- Импулсните отнемания $I_1, I_2, ...$ са ограничени отдолу, т.е. съществува константа $I_{\min} > 0$, такава че $I_i \ge I_{\min}$, $i = 1, 2, ...$;
- Както казахме по-горе, сумата от количествата на биомасата е определена предварително, т.е. съществува (планирана) константа $I_\Sigma > 0$, такава че $I_1 + I_2 + ... = I_\Sigma$.

Поставя се задачата за оптимален избор на параметрите 1 – 3 (посочени по-горе) така, че времето за възпроизводство на отнетата биомаса да е минимално.

В главата е установено, че оптималният режим на импулсните въздействия върху обема на популацията с цел добив на определено фиксирано количество биомаса се описва със следната начална задача за уравнения с импулси:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\mu}{K} N(K - N), \ t \ne t_i, \tag{20.20}$$

$$\Delta N(t)|_{t=t_i} = N(t_i + 0) - N(t_i) = -{}^{I_\Sigma}\!/_{n}, \ i = 1, 2, ..., n, \tag{20.21}$$

$$N(0) = N_0, \tag{20.22}$$

където:

- n е най-голямото естествено число, което не надминава частното ${}^{I_\Sigma}\!/_{I_{\min}}$;
- моментът t_1 определяме с помощта на формулата

$$t_1 = \frac{1}{\mu} \ln \frac{(K - N_0)(nK + I_\Sigma)}{N_0 (nK - I_\Sigma)}$$

- моментите на импулсни въздействия $t_2, t_3, ..., t_n$ се определят по следния начин:

$$t_{i+1} = t_i + \Delta_{t_i} = t_i + \Delta_t = t_1 + i.\Delta_t, \quad i = 1, 2, ..., n,$$

където

$$\Delta_t = \frac{1}{\mu} \ln \left(\frac{nK + I_\Sigma}{nK - I_\Sigma} \right)^2.$$

Следователно

$$t_i = \frac{1}{\mu}\ln\left[\frac{K-N_0}{N_0}\left(\frac{nK+I_\Sigma}{nK-I_\Sigma}\right)^{2i+1}\right],\quad i=1,2,...,n.$$

Нека динамиката на дадена популация се определя от началната задача за импулсното уравнение на Verhulst (20.20), (20.21), (20.22). Тогава при наложените по-горе ограничения, минималното време за възстановяване на биомасата е

$$n\Delta_t = \frac{2n}{\mu}\ln\frac{nK+I_\Sigma}{nK-I_\Sigma}.$$

Глава 21. Изучават се свойствата на решенията на нелинейни автономни диференциални уравнения с нефиксирани моменти на импулсни въздействия от клас Б4.

Основен обект на изследване е следната начална задача:

$$\frac{dx}{dt} = f(x),\ \text{ако}\ x(t) > X_{\min},\ \text{т.е.}\ t_{i-1} < t \le t_i; \tag{21.1}$$

$$x(t_i) = X_{\min},\ i=1,2,...; \tag{21.2}$$

$$x(t_i+0) = x(t_i) + I_i = X_{\min} + I_i; \tag{21.3}$$

$$x(t_0) = x_0, \tag{21.4}$$

Решението на изследваната задача с импулси (21.1), (21.2), (21.3), (21.4) означаваме с $x_{imp}(t;t_0,x_0,I_1,I_2,...)$.

Въвеждаме следните условия:

Н21.1. Функцията $f \in C\left[R^+, R^-\right]$.

Н21.2. Функцията f е монотонно намаляваща при $x \ge X_{\min}$.

Н21.3. Съществува положителна константа $I_{\min}$ такава, че всички импулсни въздействия са не по-малки от нея.

Н21.4. За всяка начална точка $(t_0,x_0) \in R^+ \times (X_{\min},\infty)$ решението на началната задача (21.5) съществува и е единствено за $t \ge t_0$.

Дефиниция 21.1. Нека константите $I_{\min}$, $I_\Sigma \in R^+$ и $I_{\min} \le I_\Sigma$.

Ще казваме, че импулсните въздействия $I_1^*, I_2^*, ..., I_k^*$ са допустими, ако са валидни неравенствата:

1. $I_1^* \ge I_{\min}$, $I_2^* \ge I_{\min}, ..., I_k^* \ge I_{\min}$;
2. $I_1^* + I_2^* + ... + I_k^* \le I_\Sigma$.

Дефиниция 21.2. Нека константите $I_{\min}, I_\Sigma \in R^+$ и $I_{\min} \le I_\Sigma$.

Ще казваме, че импулсните въздействия $I_1^{opt}, I_2^{opt}, ..., I_{k_{opt}}^{opt}$ са оптимални, ако:

1. $I_1^{opt}, I_2^{opt}, ..., I_{k_{opt}}^{opt}$ са допустими импулсни въздействия;
2. $t_{k_{opt}+1}^{opt}$ е моментът, в който интегралната крива $\left(t, x_{imp}\left(t;t_0,x_0,I_1^{opt},...,I_{k_{opt}}^{opt}\right)\right)$ среща бариерното множество за $\left(k_{opt}+1\right)$-ви път;
3. $I_1^*, I_2^*, ..., I_k^*$ са произволни допустими импулсни въздействия;
4 t_{k+1}^* е моментът, в който интегралната крива $\left(t, x_{imp}\left(t;t_0,x_0,I_1^*,...,I_k^*\right)\right)$ среща бариерното множество за $(k+1)$-ви път,
5. Изпълнено е $t_{k_{opt}+1}^{opt} \ge t_{k+1}^*$.

Освен това броят на импулсните въздействия k_{opt}, решението $x_{imp}\left(t;t_0,x_0,I_1^{opt},...,I_{k_{opt}}^{opt}\right)$ и съответната интегрална крива също ще наричаме оптимални.

Дефиниция 21.3. Нека $x_{imp}\left(t;t_0,x_0,I_1^*,I_2^*,...I_k^*\right)$ е решение, което е подложено на k на брой импулсни въздействия.

Тогава интервалът $J\left(I_1^*,I_2^*,...I_k^*\right)=\left[t_0,t_{k+1}^*\right]$ се нарича максимален интервал на съществуване на интегралната крива в разширената фазова полуравнина, ако:

1. $\left(\forall t\in J\left(I_1^*,I_2^*,...I_k^*\right)\right)\Rightarrow x\left(t;t_0,x_0,I_1^*,I_2^*,...I_k^*\right)\geq X_{\min}$;
2. $\left(\forall t>t_{k+1}^*\right)\Rightarrow x\left(t;t_0,x_0,I_1^*,I_2^*,...I_k^*\right)<X_{\min}$.

Доказани са десетина теореми, в които се сравняват максималните интервали на съществуване на интегралните криви за различни решения. Тези разлики са свързани с различни импулсни въздействия. Всяка от доказаните теореми има самостоятелен интерес. Тук ще формулираме следните теореми:

Теорема 21.5. Нека са изпълнени условията:

1. Валидни са условията H21.1, H21.2 и H21.4.
2. $I_1,I_2\in R^+$, $I_1^*=I_2$ и $I_2^*=I_1$.

Тогава $J\left(I_1^*,I_2^*\right)=J\left(I_1,I_2\right)$.

Теорема 21.7. Нека са изпълнени условията:

1. Валидни са условията H21.1, H21.2 и H21.4.
2. $I_1^*,I_2^*,...,I_n^*,I_1,I_2,...,I_n\in R^+$;
3. $\left\{I_1^*,I_2^*,...,I_n^*\right\}=\left\{I_1,I_2,...,I_n\right\}$.

Тогава $J\left(I_1^*,I_2^*,...,I_n^*\right)=J\left(I_1,I_2,...,I_n\right)$

Теорема 21.8. Нека са изпълнени условията:

1. Валидни са условията H21.1, H21.2 и H21.4.
2. $I_1^*,I_1,I_2\in R^+$ и $I_1^*=I_1+I_2$.

Тогава $J\left(I_1^*\right)\subset J\left(I_1,I_2\right)$.

Теорема 21.9. Нека са изпълнени условията:

1. Валидни са условията H21.1, H21.2 и H21.4.
2. $I_1^*,I_2^*,I_1,I_2\in R^+$, $I_1^*+I_2^*=I_1+I_2$ и $I_1=I_2=\frac{1}{2}\left(I_1^*+I_2^*\right)$.

Тогава $J\left(I_1^*,I_2^*\right)\subset J\left(I_1,I_2\right)$.

Основният резултат в главата е следната теорема:

Теорема 21.10. Нека са изпълнени условията:

1. Валидни са условията H21.1 - H21.4.
2. Сумата от всички импулсни въздействия е равна на $I_\Sigma\in R^+$.
3. Константата $n\in N$ удовлетворява неравенствата $\frac{1}{n+1}I_\Sigma<I_{\min}\leq\frac{1}{n}I_\Sigma$.
4. Импулсните въздействия $I_1,I_2,...,I_n$ са допустими и $I_1=I_2=...=I_n=\frac{1}{n}I_\Sigma$.
5. Импулсните въздействия $I_1^*,I_2^*,...,I_k^*$ са допустими, т.е. $I_1^*,I_2^*,...,I_k^*\in R^+$, $I_1^*\geq I_{\min}$, $I_2^*\geq I_{\min},...,I_k^*\geq I_{\min}$ и $I_1^*+I_2^*+...+I_k^*=I_\Sigma$.

Тогава $J\left(I_1^*,I_2^*,...,I_k^*\right)\subset J\left(I_1,I_2,...,I_n\right)$.

Разгледан е импулсен модел от фармакокинетиката, описващ изменението във времето на концентрацията на лекарствено средство в кръвта на пациент. Вливанията на лекарството се осъществяват импулсно в определени от лекуващия лекар моменти. Предполага се, че наличното лекарство е в ограничен обем. Освен това всяко вливане на лекарство (всяка „доза“) има ограничителен минимален обем. Получените теоретични резултати в предходния параграф са приложени върху описания модел. Намерено е оптимално лечение, при което терапевтичната концентрация на лекарственото средство в кръвта на пациента, е с максимална продължителност.

Библиография

[Agarwal 1] Agarwal R., Franco D., O'Regan D., Singular boundary value problems for first and second order impulsive differential equations, Equations Matematicae, (2005), Vol. 69, № 1-2, 83-96.

[Agarwal 2] Agarwal R., Hristova S., O'Regan D., Noninstantaneous impulses in Caputo fractional differential equations and practical stability via Lyapunov functions, Journal of the Franklin Institute, (2017), Vol. 354, № 7, 3097-3119.

[Agarwal 3] Agarwal R., Karakoc F., A survey on oscillation of impulsive delay differential equations, Computers & Mathematics with Applications, (2010), Vol. 60, № 6, 1648-1685.

[Agarwal 4] Agarwal R., O'Regan D., A multiplicity result for second order impulsive differential equations via the Leggett Williams fixed point theorem, Applied Mathematics and Computation, (2003), Vol. 161, № 2, 433-419.

[Agarwal 5] Agarwal R., O'Regan D., Multiple nonnegative solutions for second order impulsive differential equations, Applied Mathematics and Computation, (2000), Vol. 114, № 1, 51-59.

[Ahmad 1] Ahmad B., Sivasundaram S., Dynamics and stability of impulsive hybrid setvalued integro-differential equations with delay, Nonlinear Analysis, (2006), Vol. 65, № 11, 2289-2293.

[Ahmad 2] Ahmad B., Sivasundaram S., Instability criteria for impulsive hybrid state dependent delay integrodifferential systems, Nonlinear Analysis: Real World Applications, (2010), Vol. 11, № 2, 750-758.

[Ahmad 3] Ahmad B., Sivasundaram S., Setvalued perturbed hybrid integro-differential equations and stability in terms of two measures, Dynamic Systems and Applications, (2007), Vol. 16, 299-310.

[Ahmad 4] Ahmad B., Sivasundaram S., The monotone iterative technique for impulsive hybrid set valued integro-differential equations, Nonlinear Analysis, (2006), Vol. 65, № 12, 2260-2276.

[Ahmad 5] Ahmad N., Ali Z., Shah K., Zada A., Ghaus ur Rahman, Analysis of implicit type nonlinear dynamical problem of impulsive fractional differential equations, Hindawi Complexity, Vol. 2018, Article ID 6423974, 15 pages.

[Ahmad 6] Ahmad S., Alassar R., Covachev V., Covacheva Z., Al-Zahrani E., Continuous-time additive Hopfield-type neural networks, Nonlinear Analysis: Real World Applications, (2009), Vol. 10, № 3, 1846-1853.

[Ahmad 7] Ahmad S., Stamov G., Almost periodic solutions of N-dimensional impulsive competitive systems, Nonlinear Analysis: Real World Applications, (2009), Vol. 10, № 3, 1846-1853.

[Ahmad 8] Ahmad S., Stamova I., Global exponential stability for impulsive cellular neural networks with time-varying delays, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, (2008), Vol. 69, № 3, 786-791.

[Akhmet 1] Akhmet M., On the smoothness of solutions of impulsive autonomous systems, Nonlinear Analysis, (2005), Vol. 60, № 2, 311-324.

[Akhmet 2] Akhmet M., Principles of discontinuous dynamical systems, Springer, New York, (2010).

[Akhmet 3] Akhmet M., Alzabut J., Zafer A., Perron's theorem for linear impulsive differential equations with distributed delay, J. of Computational and Applied Mathematics, (2006), Vol. 193, № 1, 204-218.

[Akhmet 4] Akhmet M., Beklioglu M., Ergenc T., Tkachenko V., An impulsive ratio-dependent predator–prey system with diffusion, Nonlinear Analysis: Real World Applications, (2006), Vol. 7, № 5, 1255-1267.

[Akhmetov 1] Akhmetov M., Perestyuk N., Tleubergenova M., Control over linear pulse systems, Ukrainian Mathematical J., (1995), Vol. 47, № 3, 360-368.

[Alessandrini 1] Alessandrini G., Vessella S., Lipschitz stability for the inverse conductivity problem, Advances in Applied Mathematics, Vol. 35, № 2, (2005), 207-241.

[Ali 1] Ali A., Rabiei F., Shah K., On Ulam's type stability for a class of impulsive fractional differential equations with nonlinear boundary conditions, J. of Nonlinear Sciences and Applications, (2017), Vol. 10, № 9, 4760-4775.

[Alves 1] Alves J., Carvalho M., Siqueira J., Equilibrium states for impulsive semiflows, J. of Mathematical Analysis and Applications, (2017), Vol. 451, № 2, 839-857.

[Angelova 1] Angelova J., Dishliev A., Optimization problems for one-impulsive models from population dynamics, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, (2000), Vol. 39, № 4, 483-497.

[Angelova 2] Angelova J., Dishliev A., Optimization problems in population dynamics, Applicable Analysis, (1999), Vol. 69, 207-221.

[Angelova 3] Angelova J., Dishliev A., Nenov S., I-optimal curve for impulsive Lotka-Volterra predator-prey model, Computers & Mathematics with Applications, (2002), Vol. 43, № 10-11, 1203-1218.

[Angelova 4] Angelova A., Dishliev A., Nenov S., Optimization problems for impulsive Lotka-Volterra predator-prey model, International J. of Differential Equations and Applications, (2000), Vol. 3, № 4, 7-18.

[Anokhin 1] Anokhin A., Berezansky L., Braverman E., Exponential stability of linear delay impulsive differential equations, J. of Mathematical Analysis and Applications, (1995), Vol. 193, 923-941.

[Antonov 1] Antonov A., Dishliev A. A., Dishliev A. B., Nenov S., Mathematical modelling of discontinuous processes, Scientific Research Publishing, Delaware, USA and Wuhan, China, (2017).

[Aubin 1] Aubin J., Mathematical methods of game and economic theory, Courier Corporation, (2007).

[Baek 1] Baek H., Extinction and permanence of a three-species Lotka-Volterra system with impulsive control strategies, Discrete Dynamics in Nature and Society, (2008), Article ID 752403, 18 p.

[Bailey 1] Bailey J., Shafer S., A simple analytical solution to the three-compartment pharmacokinetic model suitable for computer-controlled infusion pumps, Biomedical Engineering, (1991), Vol. 38, № 6, 522-525.

[Bainov 1] Bainov D., Covachev V., Impulsive differential equations with a small parameter, World Scientific, Singapore, (1994).

[Bainov 2] Bainov D., Covachev V., Stamova I., Estimates of the solutions of impulsive quasilinear functional differential equations, Annales de la Faculte des Sciences de Toulouse, (1991), Vol. 12, № 2, 149-161.

[Bainov 3] Bainov D., Covachev V., Stamova I., Stability under persistent disturbances of impulsive differential-difference equations of neutral type, J. of Mathematical Analysis and Applications, (1994), Vol. 187, № 3, 790-808.

[Bainov 4] Bainov D., Dimitrova M., Dishliev A., Asymptotic properties of solutions of a class of impulsive differential equations of second order with a retarded argument, Kodai Mathematical J., (1997), Vol. 20, № 2, 120-126.

[Bainov 5] Bainov D., Dimitrova M., Dishliev A., Necessary and sufficient conditions for existence of nonoscillatory solutions of impulsive differential equations of second order with retarded argument, Aplicable Analysis, (1996), Vol. 63, № 3&4, 287-297.

[Bainov 6] Bainov D., Dimitrova M., Dishliev A., Oscilatory solutions of a class of nonlinear impulsive differential equations of first order with retarded argument, J. of Applied Analysis, (1998), Vol. 4, № 2, 215-230.

[Bainov 7] Bainov D., Dimitrova M., Dishliev A., Oscillating solutions of nonlinear impulsive differential equations with a deviating argument, Note di Matematica, (1995), Vol. 15, № 1, 45-54.

[Bainov 8] Bainov D., Dimitrova M., Dishliev A., Oscillation of the solutions of class of impulsive differential equations with a deviating argument, J. of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, (1998), Vol. 11, № 1, 95-102.

[Bainov 9] Bainov D., Dimitrova M., Petrov V., Oscillatory properties of solutions of impulsive differential equations with several retarded argument, Georgian Mathematical J., (1998), Vol. 5, № 3, 201-212.

[Bainov 10] Bainov D., Dishliev A., Hristova S., An application of the method of quasilinearization for a periodic problem for systems of nonlinear differential equations, Comtes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences, (1997), Tome 50, № 11-12, 21-22.

[Bainov 11] Bainov D., Dishliev A., Hristova S., Monotone iterative technique for impulsive differential-difference equations with variable impulsive perturbations, Multivariate Approximation and Splines, Birkhäuser Verlag, Basel, G. Nurnberger, J. Schmidt and G. Wals (eds), (1997), 13-28.

[Bainov 12] Bainov D., Dishliev A., Hristova S., The method of quasilinearization for the initial value problem for systems of impulsive differential equations, Indian J. of Pure and Applied Mathematics, (1999), Vol. 30, № 9, 893-910.

[Bainov 13] Bainov D., Dishliev A., Population dynamics control in regard to minimizing the time necessary for the regeneration of a biomass taken away from the population, Applied Mathematics and Computation, (1990), Vol. 39, № 1, 37-48.

[Bainov 14] Bainov D., Dishliev A., Population dynamics control in regard to minimizing the time necessary for the regeneration of a biomass taken away from the population, Comtes Rendus de l'Academie Bulgare Sciences, (1989), Vol. 42, № 12, 29- 32.

[Bainov 15] Bainov D., Dishliev A., Stamov G., Almost periodic solutions of hyperbolic systems of impulsive differential equations, Kumamoto J. of Mathematics, (1997), Vol. 10, 1-10.

[Bainov 16] Bainov D., Dishliev A., Stamova I., Asymptotic equivalence of a linear system of impulsive differential equations and system of impulsive differential-difference equations, Annali dell'Università di Ferrara. Sezione VII. Scienze Matematiche, (1995), Vol. 41, 45-54.

[Bainov 17] Bainov D., Dishliev A., Stamova I., Lipschitz quasistability of impulsive differential – difference equations with variable impulsive perturbations, J. of Computational and Applied Mathematics, (1996), Vol. 70, № 2, 267-277.

[Bainov 18] Bainov D., Dishliev A., Stamova I., Practical stability of the solutions of impulsive systems of differential-difference equations via the method of comparison and some applications to population dynamics, ANZIAM J., (2002), Vol. 43, 525-539.

[Bainov 19] Bainov D., Dishliev A., The phenomenon beating of the solutions of impulsive functional differential equations, Communications in Applied Analysis, (1997), Vol. 1, № 4, 435-442.

[Bainov 20] Bainov D., Dishliev A., Uniform stability with respect to the impulse hypersurfaces of the solutions of differential equations with impulses, International J. Systems Science, (1990), Vol. 21, № 12, 2637-2643.

[Bainov 21] Bainov D., Domshlak Y., Milusheva S., Partial averaging for impulsive differential equations with supremum, Georgian Mathematical J., (1996), Vol. 3, № 1, 11-26.

[Bainov 22] Bainov D., Hristova S., Differential equations with maxima, Pure and Applied Mathematics, Chapman & Hall/CRC, New York, (2011).
[Bainov 23] Bainov D., Kostadinov S., Minh N., Dichotomies and integral manifolds of impulsive differential equations, Science Culture Technology Publishing, (1994).
[Bainov 24] Bainov D., Kostadinov S., Myshkis A., Asymptotic equivalence of abstract impulsive differential equations, International J. of Theoretical Physics, (1996), Vol. 36, № 2, 383-393.
[Bainov 25] Bainov D., Kostadinov S., Zabrejko P., L_p-equivalence of linear and nonlinear impulsive differential equations in a Banach space, Proceedins of the Edinburgh Mathematical Society, (1992), Vol. 36, 17-33.
[Bainov 26] Bainov D., Kostadinov S., Zabrejko P., Exponential dichotomy of linear impulsive differential equations in a Banach space, International J. of Theoretical Physics, (1989), Vol. 28, № 7, 797-814.
[Bainov 27] Bainov D., Kostadinov T., Petrov V., Oscillatory and asymptotic properties of nonlinear first order neutral differential equations with piecewise constant argument, J. of Mathematical Analysis and Applications, (1995), Vol. 194, № 3, 612-639.
[Bainov 28] Bainov D., Kulev G., Stamova I., Global stability of the solutions of impulsive differential-difference equations, SUT J. of Mathematics, (1995), Vol. 1, 55-71.
[Bainov 29] Bainov D., Kulev G., Stamova I., Instability of solutions of impulsive systems of differential equations, International J. of Theoretical Physics, (1996), Vol. 35, № 8, 1799-1804.
[Bainov 30] Bainov D., Markova N., Simeonov P., Asymptotic behavior of the nonoscillatory solutions of differential equations of second order with delay depending on the unknown functions, J. of Computational and Applied Mathematics, (1998), Vol. 91, № 1, 87-96.
[Bainov 31] Bainov D., Milusheva S., Application of the averaging method for functional-differential equations with impulses, J. of Mathical Analysis and Applications, (1983), Vol. 95, № 1, 85-101.
[Bainov 32] Bainov D., Milusheva S., Justification of the averaging method for a system of differential equations with fast and slow variables and with impulses, Zeitschrift fur Angawandte Mathematik und Physik, (1981), Vol. 32, 237-254.
[Bainov 33] Bainov D., Minchev E., Trends in the theory of impulsive partial differential equations, Nonlinear Word, (1996), Vol. 3, 357-384.
[Bainov 34] Bainov D., Nenov S., Limit sets of impulsive dynamical systems, Proceedings of the Fourth International Colloquium on Differential Equations, (1994), 31-34.
[Bainov 35] Bainov D., Petrov V., Proytcheva V., Existence and asymptotic behavior of nonoscillatory solutions of second-order neutral differential equations with “maxima”, J. of Computational and Applied Mathematics, (1997), Vol. 83, № 2, 237-249.
[Bainov 36] Bainov D., Simeonov P., Impulsive differential equations: Asymptotic properties of the solutions, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, (1995).
[Bainov 37] Bainov D., Simeonov P., Impulsive differential equations: Periodic solutions and applications, Longman Scientific & Technical, Harlow, (1993).
[Bainov 38] Bainov D., Simeonov P., Integral inequalities and applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1992).
[Bainov 39] Bainov D., Simeonov P., Oscillation theory of impulsive differential equations, International Publications, FL, (1998).
[Bainov 40] Bainov D., Simeonov P., System with impulse effect: Stability theory and applications, Ellis Horwood, Chichester, (1989).
[Ballinger 1] Ballinger G., Liu X., Permanence of population growth model with impulsive effects, Mathematics and Computer Modeling, (1997), Vol. 26, № 12, 59-72.
[Benchohra 1] Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S., Impulsive differential equations and inclusions, Contemporary Mathematics and its Applications, Hindawi Publishing Corporations, Vol. 2, (2006).
[Benchohra 2] Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S., Impulsive neutral functional differential equations in Banach spaces, Applicable Analysis, (2001), Vol. 80, № 3, 353-361.
[Benchohra 3] Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S., Ouahab A., Impulsive functional differential equations with variable times, Computers & Mathematics with Applications, (2004), Vol. 47, № 10-11, 1659-1665.
[Benchohra 4] Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S., Ouahab A., Impulsive functional differential equations with variable times and infinite delay, International J. of Applied Mathical Sciences, (2005), Vol. 2, № 1, 130-148.
[Benchohra 5] Benchohra M., Ouahab A., Impulsive neutral functional differential equations with variable times, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, (2003), Vol. 55, № 6, 679-693.
[Berezansky 1] Berezansky L., Braverman E., On Impulsive Beverton-Holt difference equations and their applications, J. of Differential Equations and Applications, (2004), Vol. 10, № 9, 851-868.
[Boyd 1] Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V., Linear matrix inequalities in system and control theory. Society for industrial and applied mathematics, (1994).

[Branicky 1] Branicky M., Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems, IEEE Transactions on Automatic Control, (1998), Vol. 43, № 4, 475-482.
[Brauer 1] Brauer F., Castillo-Chavez C., Mathematical models in population biology and epidemiology, New York: Springer, (2001), Vol. 40.
[Braverman 1] Braverman E., Mamdani R., Continuous versus pulse harvesting for population models in constant and variable environment, J. of Mathematical Biology, (2008), Vol. 57, № 3, 413-434.
[Chellaboina 1] Chellaboina V., Bhat S., Haddad W., An invariance principle for nonlinear hybrid and impulsive dynamical systems, Nonlinear Analysis, (2003), Vol. 53, № 3-4, 527-550.
[Chen 1] Chen J., Tisdell C., Yuan R., On the solvability of periodic boundary value problems with impulse, J. of Mathematical Analysis and Applications, (2007), Vol. 331, № 2, 902-912.
[Chen 2] Chen G., Shen J., Boundedness and periodicity for impulsive functional differential equations with applications to impulsive delayed Hopfield neuron networks, Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems, Ser. A, (2007), Vol. 14, 177-188.
[Chen 3] Chen S., Qi J., Jin M., Pulse phenomena of second-order impulsive differential equations with variable moments, Computers & Mathematics with Applications, Vol. 46, № 8-9, (2003), 1281-1287.
[Chen 4] Chen Z., Zhang T., Tade M., Brooks G., Existence of periodic solutions of a continuous flow bioreactor model with impulsive control in microorganisms, J. of Applied Mathematics and Computing, (2017), Vol. 53, № 1-2, 471-486.
[Cheng 1] Cheng D., Yan J., Global existence and asymptotic behavior of solution of second-order nonlinear impulsive differential equations, International J. of Mathematics and Mathematical Sciences, (2001), Vol. 25, № 3, 175-182.
[Chua 1] Chua L., Yang L., Cellular neural networks: Applications, IEEE Transactions on Circuits and Systems CAS, (1988), Vol. 35, 1273-1290.
[Chua 2] Chua L., Yang L., Cellular neural networks: Theory, IEEE Transactions on Circuits and Systems CAS, (1988), Vol. 35, 1257-1272.
[Chukleva 1] Chukleva R., Modeling using differential equations with variable structure and impulses, International Journal of Pure and Applied Mathematics, (2011), Vol. 72, № 3, 343-364.
[Chukleva 2] Chukleva R., Dishliev A., On the continuous dependence of the switching moments of trajectories, Proceedings of the Jubilee Scientific Conference with International Participation Dedicated to the, 50th Anniversary of the Smolyan Branch of Plovdiv University, (2012), Vol. 2, Part 2, 75-80.
[Chukleva 3] Chukleva R., Dishliev A., Dishlieva K., Continuous dependence of the solutions of the differential equations with variable structure and impulses in respect of switching functions International J. of Applied Science and Technology, (2011), Vol. 1, № 5, 46-59.
[Chukleva 4] Chukleva R., Dishliev A., Dishlieva K., Stability of differential equations with variable structure and non fixed impulsive moments using sequences of Lyapunov's functions, International J. of Differential Equations and Applications, (2012), Vol. 11, № 1, 57-80.
[Chukleva 5] Chukleva R., Dishlieva K., Dishliev A., Continuous dependence of dying solutions of systems differential equations with variable structure and impulses, J. of Advanced Research on Scientific Computing, (2013), Vol. 5, № 3, 11-21.
[Coddington 1] Coddington E., Levinson N., Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill Book Company, New York, Toronto, London, (1955).
[Cooper 1] Cooper R., Introduction to queueing theory. North Holland, (1981).
[Cordova-Lepe 1] Cordova-Lepe F., Advances in theory of impulsive differential equations at impulse-dependent times, with applications to bio-economics, Biomat 2006, International Symposium on Mathematical and Computational Biology, World Scientific Publishing, Singapore, (2006), 343-358.
[D'onofrio 1] D'onofrio A., Stability properties of pulse vaccination strategy in SEIR epidemic model, Mathematical Biosciences, (2002), Vol. 179, № 1, 179, 57-72.
[Dai 1] Dai B., Su H., Hu D., Periodic solution of a delayed ratio-dependent predator-prey model with monotonic functional response and impulse, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, (2009), Vol. 70, № 1, 126-134.
[Dannan 1] Dannan F., Elaydi S., Lipschitz stability of nonlinear systems of differential equations, J of Mathematical Analysis and Applications, (1986), Vol. 113, 562-577.
[DeCarlo 1] DeCarlo R., Zak S., Matthews G., Variable structure control of nonlinear multivariable systems: a tutorial, Proceedings on the IEEE, (1988), Vol. 76, № 3, 212-232.
[Dhage 1] Dhage B., Boucherif A., Ntouyas S., On periodic boundary value problems of first-order perturbed impulsive differential inclusions, Electronic J. of Differential Equations, (2004), Vol. 2004, № 84, 1–9.
[Dimov 1] Dimov H., Nenov S., Some features of uncontinuable solutions of impulsive dynamical systems, Extracta Mathematicae, (1996), Vol. 11, № 3, 443-456.
[Dimov 2] Dimov H., Nenov S., Petkova S., Continuous dependence of the solutions of impulsive dynamical systems from the initial conditions, J. of the University of Chemical Technology and Metallurgy, (2001), Vol. 36, № 1, 103-112.

[Dishliev 1] Dishliev A., Bainov D., Conditions for the absence of the phenomenon ”beating” for systems of impulse differential equations, Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica, (1985), Vol. 13, № 3, 237-256.
[Dishliev 2] Dishliev A., Bainov D., Continuous dependence of the solution of a system of differential equations with impulses on the impulse hypersurfaces, J. of Math. Analysis and Applications, (1988), Vol. 135, № 2, 369-382.
[Dishliev 3] Dishliev A., Bainov D., Continuous dependence on the initial condition of the solution of a system of differential equations with variable structure and with impulses, Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences Kyoto University, (1987), Vol. 23, №. 6, 923-936.
[Dishliev 4] Dishliev A., Bainov D., Dependence upon initial conditions and parameters of solutions of impulsive differential equations with variable structure, International J. of Theoretical Physics, (1990), Vol. 29, № 6, 655-675.
[Dishliev 5] Dishliev A., Bainov D., Hristova S., Lyapunov’s functions and boundedness of the solutions of impulsive differential equations, Applicable Analysis, (1995), Vol. 59, 257-269.
[Dishliev 6] Dishliev A., Bainov D., Differentiability on a parameter and initial condition of the solution of a system of differential equations with impulses, Osterreichische Academie der Wissenschaften Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, (1987), Wien, Band 196, Heft 1-3, 69-96.
[Dishliev 7] Dishliev A., Markova N., Sufficient conditions for oscillation of the solutions of impulsive linear homogeneous differential equations with retarded argument, Communications in Applied Analysis, (2007), Vol. 11, № 2, 223-228.
[Dishliev 8] Dishliev A., Bainov D., Quasiuniqueness, uniqueness and continuability of the solutions of impulsive functional differential equations, Rendiconti di Matematica, Roma, (1995), Serie VII, Vol. 15, 391-404.
[Dishliev 9] Dishliev A., Bainov D., Sufficient conditions for absence of “beating” in systems of differential equations with impulses, Applicable Analysis, (1984), Vol. 18, № 1 & 2, 67-73.
[Dishliev 10] Dishliev A., Bainov D., Uniform stability with respect to the impulsive perturbations of the solutions of impulsive differential equations, International J. of Theoretical Physics, (1992), Vol. 31, № 2, 363-372.
[Dishliev 11] Dishliev A., Dishlieva K., Abou Habib M., Mathematical model of dynamics of the amount of information in human memory, American J. of Education, (2017), Vol. 123, №.4 (2), 1073-1081.
[Dishliev 12] Dishliev A., Dishlieva K., Antonov A., Abou Habib M., Mathematical model of the amount of information in the human memory for short time discrete trainings, Science and Educational Studies, (2018), Vol. VIII, № 1 (29), 229-244.
[Dishliev 13] Dishliev A., Dishlieva K., Antonov A., Abou Habib M., Mathematical training model maintaining minimum amount of information in the memory, London Review of Education and Science, (2017), Vol. 22, № 2, 323-340.
[Dishliev 14] Dishliev A., Dishlieva K., Orbital gravitation and orbital Hausdorff stability of Lotka-Volterra model, International J. of Applied Science and Technology, (2011), Vol. 1, № 6, 134-144.
[Dishliev 15] Dishliev A., Dishlieva K., Continuous dependence and stability of solutions of impulsive differential equations on the initial conditions and impulsive moments, International J. of Pure and Applied Mathematics, (2011), Vol. 70, № 1, 39-64.
[Dishliev 16] Dishliev A., Dishlieva K., Continuous dependence of the solutions of differential equations under “short” perturbations on the right-hand side, Communications in Applied Analysis, (2006), Vol. 10, № 2, 149-159.
[Dishliev 17] Dishliev A., Dishlieva K., Nenov S., Specific asymptotic properties of the solutions of impulsive differential equations. Methods and applications, Academic Publications, Ltd. (2012).
[Dishliev 18] Dishliev A., Dishlieva K., Orbital Hausdorff continuous dependence of the solutions of impulsive differential equations with respect to impulsive perturbations, International J. of Pure and Applied Mathematics, (2011), Vol. 70, № 2, 167-187.
[Dishliev 19] Dishliev A., Stoykov D., Stability of limiting equations of impulsive differential equations, International J. of Differential Equations and Applications, (2002), Vol. 6, № 4, 389-410.
[Dishliev 20] Dishliev A., Stoykov D., Stability via limiting equations of impulsive differential equations, International J. of Differential Equations and Applications, (2002), Vol. 6, № 4, 369-388.
[Dishliev 21] Dishliev A., Comparison of quantities of information in the memory (to appear).
[Dishliev 22] Dishliev A., Determining the coefficient of storing information in the human memory (to appear).
[Dishliev 23] Dishliev A., Bainov D., Investigation of the Lipschitz stability via limiting equations, Dynamics and Stability of Systems, (1990), Vol. 5, № 2, 59-64.

[Dishlieva 1] Dishlieva K., Asymptotic stability of nonzero solutions of discontinuous systems of impulsive differential equations, Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity, (2017), Vol. 6, № 1, 201-218.

[Dishlieva 2] Dishlieva K., Continue dependence of the solutions of impulsive differential equations on the initial conditions and barrier curves, Acta Mathematica Scientia, (2012), Vol. 32, № 3, 1035-1052.
[Dishlieva 3] Dishlieva K., Dishliev A. A., Stability of impulsive differential equations with random impulsive moments, International J. of Science, Technology and Management, ISSN (online): 2394-1537, (2015), Vol. 4, № 5, 162-172.
[Dishlieva 4] Dishlieva K., Dishliev A. A., Unlimited moments of switching for differential equations with variable structure and impulses, Advances in Mathematics - Scientific Journal, ISSN 1857-8365, (2015), Vol. 4, № 1, 11-19.
[Dishlieva 5] Dishlieva K., Dishliev A. B., Dishliev A. A., Optimal impulsive effects and maximum intervals of existence of the solutions of impulsive differential equations, Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series B, Applications & Algorithms, (2015), Vol. 22, 465-489.
[Dishlieva 6] Dishlieva K., Dishliev A., Antonov A., A class of integral manifolds for autonomous systems of differential equations, German J. of Advanced Mathematical Sciences, (2013), Vol. 1, № 1, 11-19.
[Dishlieva 7] Dishlieva K., Dishliev A., Antonov A., Chukleva R., Function of reachability for autonomous systems of differential equations, Mathematical Sciences Letters, (2015), Vol. 4, № 2, 91-99.
[Dishlieva 8] Dishlieva K., Dishliev A., Antonov A., Periodic solutions of a model of Lotka-Volterra with variable structure and impulses, J. of Advances in Mathematics, (2015), Vol. 11, № 6, 5317-5325.
[Dishlieva 9] Dishlieva K., Dishliev A., Antonov A., Totally reachable sets for autonomous systems of differential equations, International J. of Science, Technology and Management, (2015), Vol. 4, № 6, 36-46.
[Dishlieva 10] Dishlieva K., Dishliev A., Chukleva R., Petkova S., Continuous dependence on the impulsive effects of dying solutions of systems differential equations with variable structure and impulses, European J. of Mathematical Sciences, (2013), Vol. 2, № 2, 215-228.
[Dishlieva 11] Dishlieva K., Dishliev A., Girginov C., Petkova S., Continuous dependence in case of permanent active effects on the partially bounded solutions of differential equations with variable structure, J. of Advanced Research in Dynamical and Control Systems, (2013), Vol. 5, № 2, 16–33.
[Dishlieva 12] Dishlieva K., Dishliev A., Limitations of the solutions of differential equations with variable structure and impulses using sequences of Lyapunov functions, J. of Advanced Research in Applied Mathematics, (2013), Vol. 5, № 2, 39-52.
[Dishlieva 13] Dishlieva K., Dishliev A., Nenov S., Radeva V., Hausdorff metrics and parametric curves, International Electronic J. of Pure and Applied Mathematics, (2014), Vol. 8, № 2, 53-65.
[Dishlieva 14] Dishlieva K., Dishliev A., Petkova S., Death of the solutions of systems differential equations with variable structure and impulses, International J. of Differential Equations and Applications, (2012), Vol. 11, № 3, 169-181.
[Dishlieva 15] Dishlieva K., Dishliev A., Uniformly finally bounded solutions to systems of differential equations with variable structure and impulses, Electronic J. of Differential Equations, (2014), Vol. 2014, № 205, 1-9.
[Dishlieva 16] Dishlieva K., On the qualitative theory of differential equations with random impulsive moments, International J. of Science, Technology and Management, (2015), Vol. 4, № 4, 172-180.
[Dishlieva 17] Dishlieva K., Dishliev A., Radeva V., Orbital Hausdorff dependence on impulsive differential equations, International J of Differential Equations and Applications, (2014), Vol. 13, № 3, 145-163.
[Dishlieva 18] Dishlieva K., Differentiability of solutions of impulsive differential equations with respect to the impulsive perturbations, Nonlinear Analysis Series B: Real World Applications, (2011), Vol. 12, № 6, 3541-3551.
[Dishlieva 19] Dishlieva K., Periodic solutions of systems of autonomous differential equations with variable structure and impulses, International J. of Pure and Applied Mathematics (2015), Vol. 105, 4, 599-625.
[Dou 1] Dou J., Li S., Optimal impulsive harvesting policies for single-species populations, Applied Mathematics and Computation, (2017), Vol. 292, 145-155.
[Erbe 1] Erbe H., Freedman H., Liu X., Wu J., Comparison principles for impulsive parabolic equations with applications to models of single species growth, The J. of Australian Mathematical Society. Series B. Applied Mathematics, (1991), Vol. 32, 382-400.
[Feng 1] Feng C., Huang Z., Almost periodicity in an impulsive logistic equation with infinity delay, International J. of Biomathematics, (2008), Vol. 1, № 3, 355-360.
[Fenner 1] Fenner L., Pinto M., On a Hartman linearization theorem for a class of ODE with impulse effect, Nonlinear Analysis, (1999), Vol. 38, № 3, 307-321.
[Filippov 1] Filippov A., Differential equations with discontinuous right-hand sides, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1988).
[Franco 1] Franco D., Nieto J., Maximum principles for periodic impulsive first order problems, J. of Computational and Applied Mathematics, (1998), Vol. 88, № 1, 149-159.

[Frigon 1] Frigon M., O'Regan D., First order impulsive initial and periodic problems with variable moments, J. of Mathematical Analysis and Applications, (1996), Vol. 233, № 2, 730-739.
[Frigon 2] Frigon M., O'Regan D., Impulsive differential equations with variable times, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, (1996), Vol. 26, № 12, 1913-1922.
[Frigon 3] Frigon M., O'Regan D., Second order Sturm-Lowville BVP's with impulses at variable moments, Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems, (2001), Vol. 8, № 2, 149-159.
[Fu 1] Fu X., Li X., New results on pulse phenomena for impulsive differential systems with variable moments, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, (2009), Vol. 71, № 7-8, 2976-2984.
[Fu 1] Fu X., Li X., Oscillation of higher order impulsive differential equations of mixed type with constant argument at fixed time, Mathematics and Computer Modeling, (2008), Vol. 48, № 5-6, 776-786.
[Gao 1] Gao S., Chen L., Nieto J., Torres A., Analysis of a delayed epidemic model with pulse vaccination and saturation incidence, Vaccine, (2006), Vol. 24, № 35-36, 6037-6045.
[Gao 2] Gao S., Teng Z., Nieto J., Torres A., Analysis of an SIR epidemic model with pulse vaccination and distributed time delay, J. Biotechnology, (2007), Article ID 64870.
[Gao 3] Gao W., Hung J., Variable structure control of nonlinear systems: a new approach, Industrial Electronics, IEEE Transactions on, (1993), Vol. 40, № 1, 45-55.
[Georgieva 1] Georgieva A., Kostadinov S., L_p-equivalence of impulsive differential equations, SUT J. of Mathematics, (1997), Vol. 33, № 2, 291-301.
[Georgieva 2] Georgieva A., Kostadinov S., Sufficient conditions for the L_p-equivalence of two nonlinear impulsive differential equations, Turkish J. of Mathematics, (2008), Vol. 32, 451-466.
[Gladilina 1] Gladilina R., Ignatyev A., Necessary and sufficient stability conditions for invariant sets of nonlinear impulsive systems, International Applied Mechanics, (2008), Vol. 44, № 2, 228-237.
[Gonzalez 1] Gonzalez P., Pinto M., Asymptotic behavior of impulsive differential equations, Rocky Mountain J. of Mathematics, (1996), Vol. 26, № 1, 165-173.
[Gopalsamy 1] Gopalsamy K., Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1992).
[Gopalsamy 2] Gopalsamy K., Zhang B., On delay differential equations with impulses, J. of Mathematical Analysis and Applications, (1989), Vol. 139, № 1, 110-122.
[Guo 1] Guo H., Chen L., Time-limited pest control of a Lotka-Volterra model with impulsive harvest, Nonlinear Analysis: Real World Applications, (2009), Vol. 10, № 2, 840-848.
[Hartman 1] Hartman F., Ordinary differential equations, John Wiley & Sons, New York, London, Sydney, (1964).
[He 1] He Z., Ge W., Oscillation in second order linear delay differential equations with nonlinear impulses, Mathematica Slovaca, (2002), Vol. 59, № 3, 331-341.
[Henderson 1] Henderson J., Thompson H., Smoothness of solutions for boundary value problems with impulse effects, II, Mathematical and Computer Modeling, (1996), Vol. 223, № 10, 61-69.
[Hristova 1] Hristova S., Bainov D., Applications of the monotone-iterative technique of V. Lakshmikantham for solving the initial value problem for impulsive differential-difference equations, Rocky Mountain J. of Mathematics, (1993), Vol. 23, № 2, 609-618.
[Hristova 2] Hristova S., Kulev G., Quasilinearization of boundary value problem for impulsive differential equations, J. of Computational and Applied Mathematics, (2001), Vol. 132, № 2, 399-407.
[Hristova 3] Hristova S., Nonlinear delay integral inequalities for piecewise continuous functions and applications, J. of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, (2004), Vol. 5, № 4, Article 88.
[Hristova 4] Hristova S., Roberts L., Razumikhin technique for boundedness of the solutions of impulsive integrodifferential equations, Mathematical and Computer Modelling, (2001), Vol. 34, № 7-8, 839-847.
[Hristova 5] Hristova S., Stefanova K., Practical stability of impulsive differential equations with “supremum” by integral inequalities, European J. of Pure and Applied Mathematics, (2012), Vol. 5, № 1, 30-44.
[Hung 1] Hung J., Gao W., Hung J., Variable structure control: a survey, Industrial Electronics, IEEE Transactions on, (1993), Vol. 40, № 1, 2-22.
[Huo 1] Huo H-F., Existence of positive periodic solutions of a neutral delay Lotka-Volterra system with impulses, Computers & Mathematics with Applications, (2004), Vol. 48, № 12, 1833-1846.
[Ignatyev 1] Ignatyev A., On the stability of invariant sets of systems with impulse effect, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, (2008), Vol. 69, № 1, 53-72.
[Jia 1] Jia J., Li C., A Predator-prey Gompertz model with time delay and impulsive perturbations on the prey, Discrete Dynamics in Nature and Society, (2009), Vol. 2009, Article ID 256195, 15 p.
[Jiao 1] Jiao J., Chen L., Cai S., Dynamical analysis on a single population model with state-dependent impulsively unilateral diffusion between two patches, Advances in Difference Equations, (2012), 2012:155 Doi: 10.1186/1687-1847-2012-155.

[Jiao 2] Jiao J., Chen L., Nieto J., Torres A., Permanence and global attractivity of stage-structured predator-prey model with continuous harvesting on predator and impulsive stocking on prey, Applied Mathematics and Mechanics, (2008), Vol. 29, № 5, 653-663.
[Jin 1] Jin Z., Zhien M., Maoan H., The existence of periodic solutions of the n-species Lotka-Volterra competitions system with impulsive, Chaos Solitons & Fractals, (2004), Vol. 22, № 1, 181-188.
[Juang 1] Juang G., Lu Q., Impulsive state feedback control of a predator-prey model, J. of Computational and Applied Mathematics, (2007), Vol. 200, № 1, 193-207.
[Juang 2] Juang G., Lu Q., The dynamics of a prey-predator model with impulsive state feedback control, Discrete and Continuous Dynamical Systems, Ser. B, (2006), Vol. 6, 1310-1320.
[Karandjulov 1] Karandjulov L., Stoyanova Y., Problem of Cauchy for linear singularly perturbed impulsive systems, Miskolc Mathematical Notes, (2002), Vol. 3, № 1, 25-37.
[Klibanov 1] Klibanov M., Yamamoto M., Lipschitz stability of an inverse problem for an acoustic equation, Applicable analysis, (2006), Vol. 85, № 5, 515-538.
[Kosseva 1] Kosseva A., Kostadinov S., Zabrejko P., Stability of linear impulsive differential equations with unbounded operator, Rostocker Mathematisches Kolloquium, (1999), Vol. 53, 51-59.
[Kulev 1] Kulev G., Bainov D., Global stability of sets for systems with impulses, Applied Mathematics and Computation, (1989), Vol. 29, № 3, 255-270.
[Kulev 2] Kulev G., Bainov D., On the global stability of sets for impulsive differential systems by Lyapunov's direct methods, Dynamics and stability of systems, (1990), Vol. 110, № 3, 149-162.
[Kulev 3] Kulev G., Bainov D., Stability of sets for systems with impulses, Tamkang J. of Mathematics, (1988), Vol. 19, № 2, 13-22.
[Lakshmikantham 1] Lakshmikantham V., Bainov D., Simeonov P., Theory of impulsive differential equations, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, (1989).
[Lakshmikantham 2] Lakshmikantham V., Leela S., Vasundhara D., Stability theory for set differential equations, Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series A: Mathematical Analysis, (2004), Vol. 11, 181-189.
[Lakshmikantham 3] Lakshmikantham V., Liu X., Stability for impulsive differential systems in terms of two measures, Applied Mathematics and Computations, (1989), Vol. 29, № 1, 89-98.
[Lakshmikantham 4] Lakshmikantham V., Vasundhara Devi J., Hybrid systems with time scales and impulses, Nonlinear Analysis, (2006), Vol. 65, № 11, 2147-2152.
[Lan 1] Lan H.-Y., Nieto J., On initial value problems for first-order implicit impulsive fuzzy dufferential equations, Dynamic Systems and Applications, (2009), Vol. 18, 677-686.
[Li 1] Li J., Nieto J., Impulsive periodic boundary value problems of first-order differential equations, J. of Mathematical Analysis and Applications, (2007), Vol. 325, № 1, 226-236.
[Li 2] Li X., Oscillation properties of second order delay differential-difference equations with impulses, Advances in Applied Mathematical Analysis, (2008), Vol. 3, № 1, 55-66.
[Lin 1] Lin D., Hui J., The best dosage scheme on multiple rapid vein injection, J. of Biological Systems, (2007), Vol. 15, № 3, 355-364.
[Liu 1] Liu B., Teng Z., Liu W., Dynamic behaviors of the periodic Lotka-Volterra competing system with impulsive perturbations, Chaos Solitons & Fractals, (2007), Vol. 31, № 2, 356-370.
[Liu 2] Liu L., Ye Y., Existence and uniqueness of periodic solutions for a discrete-time SIP epidemic model with time delays and impulses, International J. of Computational and Mathematical Sciences, (2011), Vol. 5, № 4, 229-231.
[Liu 3] Liu S., Chen L., Luo G., Jiang Y., Asymptotic behaviors of competitive Lotka-Volterra system with stage structure, J. of Mathematical Analysis and Applications, (2002), Vol. 271, № 1, 124-188.
[Liu 4] Liu X., Impulsive stabilization and applications to population growth models, The Rocky Mountain J. of Mathematics, (1995), Vol. 25, № 1, 381-395.
[Liu 5] Liu X., Stability results for impulsive differential systems with application to population growth models, Dynamical Stability Systems, (1994), Vol. 9, № 2, 163-174.
[Liu 6] Liu X., Chen L., Complex dynamics of Holling type II Lotka-Volterra predator-prey system with impulsive perturbations on the predator, Chaos Solitons & Fractals, (2003), Vol. 16, № 3, 11-20.
[Liu 7] Liu X., Chen L., Global dynamics of the periodic logistic system with periodic impulsive perturbations, J. of Mathematical Analysis and Applications, (2004), Vol. 289, № 1, 279-291.
[Liu 8] Liu X., Li G., Luo G., Positive periodic solution for a two-species ratio-dependent predator–prey system with time delay and impulse, J. of Mathematical Analysis and Applications, (2007), Vol. 325, № 1, 715-723.
[Longo 1] Longo F., IDE: Optimization problems and population dynamics, XI Congress GAFEVOL, University of Brasilia, Brazil, on October 23-26, (2017), 67-68.
[Luo 1] Luo Z., Shen J., Stability of impulsive functional differential equations via Lyapunov functional, Applied Mathematics Letters, (2009), Vol. 22, № 2, 163-169.
[Meng 1] Meng X., Chen L., Li Q., The dynamics of an impulsive delay predator-prey model with variable coefficients, Applied Mathematics and Computation, (2008), Vol. 198, № 1, 361-374.

[Meng 2] Meng X., Chen L., Permanence and global stability in an impulsive Lotka-Volterra N-species competitive system with both discrete delays and continuous delays, International J. of Biomathematics, (2008), Vol. 1, № 2, 179-196.
[Meng 3] Meng X., Jiao J., Chen L., The dynamics of an age structured predator-prey model with disturbing pulse and time delays, Nonlinear Analysis: Real World Applications, (2008), Vol. 9, № 2, 1255-1267.
[Meng 4] Meng X., Li Z., Nieto J., Dynamic analysis of Michaelis-Menten chemostat-type competition models with time delay and pulse in a polluted environment, J. of Mathematical Chemistry, (2010), Vol. 47, № 1, 123-144.
[Mihailova 1] Mihailova D., Staneva-Stoytcheva D., The fundamentals of pharmacokinetics, State Publishing House, (1987).
[Milev 1] Milev N., Bainov D., Dichotomies for linear impulsive differential equations with variable structure, International J. of Theoretical Physics, (1992), Vol. 31, № 2, 353-361.
[Milev 2] Milev N., Bainov D., Roach G., Stability of linear systems of differential equations with variable structure and impulse effect, Mathematical Methods in the Applied Sciences, (1989), Vol. 11, № 2, 271-278.
[Milev 3] Milev N., Bainov D., Stability of linear impulsive differential equations, Computers & Mathematics with Applications, (1990), Vol. 20, № 12, 35-41.
[Miller 1] Miller R., Pattern and process in competition, Advances in Ecological Research, (1976), Vol. 4, 1-74.

[Mohamad 1] Mohamad S., Gopalsamy K., Akca H., Exponential stability of artificial neural networks with distributed delays and large impulses, Nonlinear Analysis: Real Word Applications, **,** (2008), Vol. 9, № 3, 872–888.
[Mu 1] Mu X., Tang F., Strict Lyapunov functions for impulsive hybrid time-varying systems with discontinuous right-hand side, J. of Systems Science and Complexity, (2011), Vol. 24, № 2, 261-270.
[Natanson 1] Natanson I., Theory of the functions of real variable, State educations of Technico-Theoretical Literature, Second edition, (1957).
[Naulin 1] Naulin R., Pinto M., Quasi-diagonalization of linear impulsive systems and applications, J. of Mathematical Analysis and Applications, (1997), Vol. 208, № 2, 281-297.
[Nenov 1] Nenov S., Impulsive controllability and optimizations problems in population dynamics, Nonlinear Analysis, (1999), Vol. 36, № 7, 881-890.
[Nenov 2] Nenov S., Bainov D., Impulsive dynamical systems, Proceedings of the Second International Colloquium on Differential Equations, (1992), 145-166.
[Nie 1] Nie L., Peng J., Teng Z., Hu L., Existence and stability of periodic solution of a Lotka-Volterra predator-prey model with state dependent impulsive effects, J. of Computational and Applied Mathematics, (2009), Vol. 224, № 2, 544-551.
[Nie 2] Nie L., Teng Z., Hu L., Peng J., The dynamics of a Lotka-Volterra predator-prey model with state dependent impulsive harvest for predator, BioSystems, (2009), Vol. 98, № 2, 67-72.
[Nieto 1] Nieto J., Basic theory for nonresonance impulsive periodic problems of first order, J. of Mathematical Analysis and Applications, (1997), Vol. 205, № 2, 423-433.
[Nieto 2] Nieto J., O'Regan D., Variational approach to impulsive differential equations, Nonlinear Analysis: Real World Applications, (2009), Vol. 10, № 2, 680-690.
[Nieto 3] Nieto J., Rodríguez-López R., Boundary value problems for a class of impulsive functional equations. Computers & Mathematics with Applications, (2008), Vol. 55, № 12, 2715-2731.
[Nieto 4] Nieto J., Rodríguez-López R., Periodic boundary value problem for non-Lipschitzian impulsive functional differential equations, J. of Mathematical Analysis and Applications, (2006), Vol. 318, № 2, 593-610.
[Paden 1] Paden B., Sastry S., A calculus for computing Filippov's differential inclusion with application to the variable structure control of robot manipulators, Circuits and Systems, IEEE Transactions on, (1987), Vol. 34, № 1, 73-82.
[Pandit 1] Pandit S., Deo S., Differential systems involving impulses, Lecture Notes, Springer-Verlag, Berlin, (1982).
[Peng 1] Peng Y., Wu K., Qin S., Kang Y., Properties of solution of linear controlled systems with impulses at variable times, In Control Conference (CCC), 36th Chinese IEEE, (2017), 811-816.
[Perestyuk 1] Perestyuk M., Chernikova O., Some modern aspects of the theory of impulsive differential equations, Ukrainian Mathematical J., (2008), Vol. 60, № 1, 91-107.
[Petkova 1] Petkova S., Antonov A., Chukleva R., Reachable sets for homogenous systems of differential equations and their topological properties, American J. of Applied Mathematics, (2013), Vol. 1, № 4, 49-54.
[Petkova 2] Petkova S., On the fundamental theory of impulsive differential equations with variable structure, International J. of Differential Equations and Applications, (2013), Vol. 12, № 2, 121-129.

[Plotnikov 1] Plotnikov V., Ivanov R., Kitanov N., Method of averaging for impulsive differential inclusions, Pliska Studia Mathematica Bulgarica, (1998), Vol. 12, 43-51.

[Rogovchenko 1] Rogovchenko Y., Nonlinear Impulse evolution systems and applications to population models, J. of Mathematical Analysis and Applications, (1997), Vol. 207, № 2, 300-311.

[Rouche 1] Rouche N., Habets P., Laloy M., Stability theory by Lyapunov's direct method, New York: Springer-Verlag, (1977).

[Samoilenko 1] Samojlenko A., Perestyuk N., Impulsive differential equations, World Scientific, Singapore, (1995).

[Samoilenko 2] Samoilenko A., Stanzhytskyi O., Qualitative and asymptotic analysis of differential equations with random perturbations, World scientific series on nonlinear science, (2011).

[Shen 1] Shen J., Li J., Existence and global attractivity of positive periodic solutions for impulsive predator-prey model with dispersion and time delays, Nonlinear Analysis: Real World Applications, (2009), Vol. 10, № 1, 227-243.

[Shuai 1] Shuai Z., Bai L., Wang K., Optimization problems for general simple population with n-impulsive harvest, J. of Mathematical Analysis and Applications, (2007), Vol. 329, № 1, 634-646.

[Simeonov 1] Simeonov P., Bainov D., Application of the method of the two-sided approximations to the solutions of the periodic problem for impulsive differential equations, Tamkang J. of Mathematics, (1991), Vol. 22 , № 3, 275-284.

[Simeonov 2] Simeonov P., Bainov D., Differentiability of solutions of systems with impulsive effect with respect to initial data and parameter, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, (1988), Vol. 31, № 2, 353-368.

[Simeonov 3] Simeonov P., Bainov D., Estimates for Cauchy matrix of perturbed linear impulsive equations, Chinese J. of Mathematics, (1993), Vol. 1, 73-80.

[Skripnik 1] Skripnik N., Averaging of impulsive differential inclusions with Hukuhara derivative, Nonlinear Oscillations, (2007), Vol. 10, № 3, 422-432.

[Smith 1] Smith L., Wahl L., Drug resistance in an immunological model of HIV-1 infection with impulsive drug effects, Bulletin of Mathemtical Biology, (2005), Vol. 67, № 4, 783-813.

[Stamov 1] Stamov G., Almost periodic solutions of impulsive differential equations, Springer, Heidelberg, New York, Dordrecht, London, (2012).

[Stamov 2] Stamov G., Stamova I., Almost periodic solutions for impulsive neural networks with delay, Applied Mathematical Modeling, (2007), Vol. 31, № 7, 1263-1270.

[Stamov 3] Stamov G., Stamova I., On stable integral manifolds for impulsive Kolmogorov systems of fractional order, Modern Physics Letters B, (2017), Vol. 31, № 15 1750168.

[Stamov 4] Stamov G., Stamova I., Second method of Lyapunov and existence of integral manifolds for impulsive differential-difference equations, J. of Mathematical Analysis and Applications, (2001), Vol. 258, № 2, 371-379.

[Stamova 1] Stamova I., Boundedness of impulsive functional differential equations with variable impulsive perturbations, (2008), Bulletin of the Australian Mathematical Society, (2008), Vol. 77, 331-341.

[Stamova 2] Stamova I., On the stability of an impulsive differential-difference population model, Communications in Applied Analysis, (2006), Vol. 10, 285-291.

[Stamova 3] Stamova I., Parametric stability of impulsive functional differential equations, J. of Dynamical and Control Systems, (2008), Vol. 14, № 2, 235-250.

[Stamova 4] Stamova I., Stability analysis of impulsive functional differential equations, Walter de Gruyter, Berlin, New York, (2009).

[Stamova 5] Stamova I., Vector Lyapunov functions for practical stability of nonlinear impulsive functional differential equations, J. of Mathematical Analysis and Applications, (2007), Vol. 325, № 1, 612-623.

[Stamova 6] Stamova I., Emmenegger G.-F., Stability of the solutions of impulsive functional differential equations modeling price fluctuations in single commodity markets, International J. of Applied Mathematics, (2004), Vol. 15, № 3, 271-290.

[Stamova 7] Stamova I., Stamov G., Lyapunov-Razumikhin method for asymptotic stability of sets for impulsive functional differential equations, Electronic J. of Differential Equations, (2008), Vol. 48, 1-10.

[Stamova 8] Stamova I., Stamov G., Lyapunov-Razumikhin method for impulsive functional differential equations and applications to the population dynamics, J. of Computational and Applied Mathematics, (2001), Vol. 130, № 1-2, 163-171.

[Sun 1] Sun S., Chen L., Existence of positive periodic solution of an impulsive delay logistic model, Applied Mathematics and Computation, (2007), Vol. 184, № 2, 617-623.

[Tahmasebi 1] Tahmasebi A., Fodian A., Modification of homotopy perturbation method for solving system of integro-differential equations, World J. of Modelling and Simulation, (2017), Vol. 13, № 2, 133-142.

[Tang 1] Tang S., Cheke R., Xiao Y., Optimal impulsive harvesting on non-autonomous Beverton-Holt difference equations, Nonlinear Analysis, (2006), Vol. 65, № 12, 2311-2341.

[Tripathy 1] Tripathy A., Santra S., Characterization of a class of second order neutral impulsive systems via pulsatile constant, Differential Equations & Applications, (2017), Vol. 9, № 1, 87–98.
[Tuljapurkar 1] Tuljapurkar S., Caswell H. (eds), Structured-population models in marine, terrestrial, and freshwater systems, Springer Science & Business Media, Vol. 18, (2012).
[Vasundhara 1] Vasundhara D., Basic results in impulsive set differential equations, Nonlinear Studies, (2003), Vol. 10, № 3, 259-271.
[Wang 1] Wang F., Pang G., Shen L., Qualitative analysis and applications of a kind of state-dependent impulsive differential equations, J. of Computational and Applied Mathematics, (2008), Vol. 216, № 1, 279-296.
[Wang 2] Wang H., Feng E., Xiu Z., Optimality condition of the nonlinear impulsive system in fed-bath fermentation, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, (2008), Vol. 68, № 1, 12-23.

[Wang 3] Wang L., Chen L., Nieto J., The dynamics of an epidemic model for pest control with impulsive effect, Nonlinear Analysis: Real World Applications, (2010), Vol. 11, № 3, 1374-1386.
[Wang 4] Wang W., Shen J., Luo Z., Partial survival and extinction in two competing species with impulses, Nonlinear Analysis: Real World Applications, (2009), Vol. 10, № 3, 1243-1254.
[Wang 5] Wang X., Song Q., Song X., Analysis of a stage structured predator-prey Gompertz model with disturbing pulse and delay, Applied Mathematical Modeling, (2009), Vol. 33, № 11, 4231-4240.
[Witayakiattilerd 1] Witayakiattilerd W., PID controller singularly perturbing impulsive differential equations and optimal control problem, Advances in Mathematical Physics, (2017), Vol. 2017, Article ID 1938513.
[Wu 1] Wu S.-J., Meng X., Boundedness of nonlinear differential systems with impulsive effect on random moments, Acta Mathematicae Applicatae Sinica, (2004), Vol. 20, № 1, 147-154.
[Xia 1] Xia Y., Positive periodic solutions for a neutral impulsive delayed Lotka-Volterra competition system with the effect of toxic substance, Nonlinear Analysis: Real World Applications, (2007), Vol. 8, № 1, 204-221.
[Xian 1] Xian X., O’Regan D., Agarwal R., Multiplicity results via topological degree for impulsive boundary value problems under non-well-ordered upper and lower solution conditions, Hindawi Publishing Corporations, Boundary Value Problems, (2008), Vol. 2008, Article ID 197201.
[Yan 1] Yan J., Zhao A., Nieto J., Existence and global attractively of positive periodic solution of periodic single-species impulsive Lotka-Volterra systems, Mathematics and Computer Modeling, (2004), Vol. 40, № 5-6, 509-518.
[Yang 1] Yang D., Wang JinRong, O’Regan D., Asymptotic properties of the solutions of nonlinear non-instantaneous impulsive differential equations, J. of the Franklin Institute (2017), Vol. 354, 6978–7011.
[Yang 2] Yang Y., Cao J., Stability and periodicity in delayed cellular neural networks with impulsive effects, Nonlinear Analysis: Real World Applications, (2007), Vol. 8, № 1, 362-374.
[Yang 3] Yang Z., Xu D., Stability analysis of delay neural networks with impulsive effects, IEEE Transactions on Circuits and Systems, (2005), Vol. 52, 517-521.
[Yang 4] Yang Z., Xu D., Xiang L., Exponential p-stability of impulsive stochastic differential equations with delays, Physics Letters A, (2006), Vol. 359, № 2, 129-137.
[Zabrejko 1] Zabrejko P., Bainov D., Kostadinov S., Characteristic exponents of impulsive differential equations, International J. of Theoretical Physics, (1988), Vol. 27, № 6, 731-743.
[Zang 1] Zang Y., Sun J., Strict stability of impulsive functional differential equations, J. of Mathematical Analysis and Applications, (2005), Vol. 301, № 1, 237-248.
[Zavalishchin 1] Zavalishchin S., Sesekin A., Dynamic impulse systems. Theory and applications. Mathematics and its applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1997).
[Zeng 1] Zeng G., Wang F., Nieto J., Complexity of a delayed predator-prey model with impulsive harvest and Holling-type II functional response, Advances in Complex Systems, (2008), Vol. 11, № 1, 77-97.
[Zhang 1] Zhang H., Chen L., Nieto J., A delayed epidemic model with stage-structure and pulses for pest management strategy, Nonlinear Analysis: Real World Applications, (2008), Vol. 9, № 4, 1714-1726.
[Zhang 2] Zhang W., Fan M., Periodicity in a generalized ecological competition system governed by impulsive differential equations with delays, Mathematical and Computer Modelling, (2004), Vol. 39, № 4-5, 479-493.
[Zhang 3] Zhang X., Shuai Z., Wang K., Optimal impulsive harvesting policy for single population, Nonlinear Analysis: Real World Applications, (2003), Vol. 4, № 4, 639-651.
[Zhao 1] Zhao A., Lakshmikantham V., Existence of positive solutions for delay differential equations with impulses, J. of Mathematical Analysis and Applications, (1997), Vol. 210, № 2, 667-678.
[Zhao 2] Zhao L., Liu J., Wang L., The optimal and the optimization controls for the management model of fishery with two impulsive effects, ISSN: 1934-1768, 35th Chinese Control Conference (CCC), 27-29 July 2016, IEEE, (2016), 2501–2504.

[Zhao 3] Zhao L., Liu J., Zheng Z., Hu G., Optimization impulsive control of the fold catastrophe model for the aphid population ecosystem, Control Conference (CCC), 2015 34th Chinese, (2015), 2397-2400, IEEE.

[Алимов 1] Алимов Ю., О применении прямого метода Ляпуного к дифференциальным уравнениям с неоднозначными правыми частями, Автоматика и телемеханика, (1961), Том 22, № 7, 817-830.

[Андреев 1] Андреев А., Попов В., Апроксимиране на функции относно една Δ-метрика от хаусдорфски тип, Годишник на Софийския университет “Климент Охридски“, Математически факултет, (1971), Том 64, 127-142.

[Андреев 2] Андреев А., Числен метод за построение на полинома на най-добро Хаусдорфово приближение, Доклади на БАН, (1976), Том 29, 163-166.

[Андронов 1] Андронов А., Витт А., Хайкин С., Теория колебаний, Наука, Москва, (1981).

[Бабицкий 1] Бабицкий В., Крупенин В., Колебания в сильно нелинейных системах, Наука, Москва, (1985).

[Баутин 1] Баутин Н., Теория точечных преобразований и динамическая теория часов, Труды ICNO V, АН УкрССР , Киев, (1963), Том 2, 29-54.

[Борисенко 1] Борисенко С., Косолапов В., Оболенский А., Устойчивость процесов при неперерывных и дискретных возмущениях, Наукова думка, Москва, (1988).

[Борисенко 2] Борисенко С., Об асимптотической устойчивости решений систем с импульсным воздействием, Укр. Математический журнал, (1983), Том 35, № 2, 144-150.

[Борисенко 3] Борисенко С., Об устойчивости решений по линейному приближению систем с импульсным воздействием, Дифференциальные уравнения, (1986), Том 22, № 5, 884-886.

[Боянов 1] Боянов Б., Върху полиномите на най-добро приближение относно хаусдорфово разстояние, Годишник на Софийския университет “Климент Охридски“, Математически факултет, Том 64, (1971), 161-170.

[Боянов 2] Боянов Т., О порядке наилучшего приближения алгебраическами многочленами относительно расстояния хаусдорфова типа, Доклады БАН, Том 23, (1970), 635-638.

[Боянов 3] Боянов Т., Попов В., Върху напречниците на пространството от непрекъснати функции с метрика от хаусдорфов тип, Годишник на Софийския университет, Математически факултет, Том 63, (1970), 167-185.

[Веселинов 1] Веселинов В., Обратные теоремы для хаусдорфова приближения функций линейными операторами, Доклады БАН, (1976), Том 29, 159-162.

[Гасанов 1] Гасанов Г., О порядке сходимости интерполационных процессов Ермита-Фейера в хаусдорфовой метрике, (1970), Известия АН АзССР, Кн 3, 3-7.

[Гургула 1] Гургула С., Перестюк Н., Об второго метода Ляпунова для систем с импульсными воздействием, Доклады АН Укр. ССР, (1982), Серия А, Том 10, 11-14.

[Дишлиев 1] Дишлиев А., Дишлиева К., Ненов С., Увод в теория на масовото обслужване, Химикотехнологичен и металургичен университет, София, (2016).

[Долженко 1] Долженко Е., Севастьянов Е., О приближениях функций в хаусдорфовой метрике, Доклады АН СССР, (1976), Том 226, 768-770.

[Долженко 2] Долженко Е., Севастьянов Е., О приближениях функций в хаусдорфовой метрике посредством кусочно монотонных (в частности, рациональных) функций, Математический сборник, (1976), Том 101, 508-541.

[Завалищин 1] Завалищин С., Сесекин А., Импульсные процессы: Модели и приложения, Наука, Москва, (1991).

[Завалищин 2] Завалищин С., Сесекин А., Дрозденко С., Динамические системы с импульсной структурой, Средне Урал. Изд-во, Свердловск, (1983).

[Калитин 1] Калитин Б., О колебаниях маятника с ударные импульсом, Дифференциальные уравнения, (1969), Том 5, № 7, 1267-1274.

[Калитин 2] Калитин Б., О колебаниях маятника с ударные импульсом, часть 2, Дифференциальные уравнения, (1970), Том 6, № 12, 2174-2181.

[Калитин 3] Калитин Б., О предельных циклах маятниковых систем с импульсным возмущением, Дифференциальные уравнения, (1971), Том 7, № 3, 540-542.

[Каранджулов 1] Каранджулов Л., Стоянова Я., Краевая задача для сингулярно возмущенных импульсных систем в критическом случае, Весці НАН Беларусі, (2003), Том 2, 59-61.

[Каранджулов 2] Каранджулов Л., Стоянова Я., Обобщеная задача Коши для сингулярно возмущенных импульсных систем в критическом случае, Дифференциальные уравнения, (2004), Том 40, № 3, 310-323.

[Кобринский 1] Кобринский А. Е., Кобринский А. А., Выброударные системы, Наука, Москва, (1973).

[Козлов 1] Козлов Р., К теории дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями, Дифференциальные уравнения, (1974), Том 10, № 7, 1264-1271.

[Матросов 1] Матросов В., О дифференциальных уравнениях и неравенствах с разрывными правыми частями I, Дифференциальные уравнения, (1967), Том 3, № 3, 395-409.
[Матросов 2] Матросов В., О дифференциальных уравнениях и неравенствах с разрывными правыми частями II, Дифференциальные уравнения, (1967), Том 3, № 5, 869-878.
[Марков 1] Марков С., Одностранее приближение функций относительно хаусдорфова расстояния, (1972), Конструктивная теория функций, София, 69-75.
[Мартынюк 1] Мартынюк В., О приближении ломаными кривых, заданных параметрическими уравнениями, в хаусдорфовой метрике, (1976), Украинский математический журнал, Том 28, 87-91.
[Мартынюк 2] Мартынюк В., О приближениии функции В. А. Стеклова в хаусдорфовой метрике, (1969), Математические заметки, Кн. 5, 21-30.
[Мильман 1] Мильман В., Мышкис А., Об устойчивости движения при наличии толчков, Сибирский Математический журнал, (1960), Том 1, № 2, 233-237.
[Мильман 2] Мильман В., Мышкис А., Случайные толчки в линейных динамических системах, Приближеные методы решения дифференциальных уравнений, Киев, Изд-во АН УкрССР, (1963), 64-81.
[Панов 1] Панов А., Вычисление ε-энтропии пространства непрерывных функций с хаусдорфовой метрикой, (1977), Математические заметки, Том 21, 39-50.
[Перестюк 1] Перестюк Н., Плотников В., Самойленко А., Скрипник Н., Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью, Институт математики НАН Украини, Киев, (2007).
[Петрушев 1] Петрушев П., Ташев С., Некоторы обратны теоремы в метрике Хаусдорфа, Доклады БАН, (1976), Том 29, 1721-1724.
[Петрушев 2] Петрушев П., Христов В., О приближении полиномами Мюнца в метрике Хаусдорфа, Доклады БАН, (1976), Том 29, 955-958.
[Петрушев 3] Петрушев П., Христов В., Сходимост ряда Фурие в метрике Хаусдорфа, Плиска Български математически студии, (1977), Кн. 1, 21-36.
[Плотников 1] Плотников В., Китанов Н., Непрерывная зависимость решений импульсных дифферентиальных включений и импульсных задач управления, Кибернетика и системный анализ, (2002), Том 5, 71-81.
[Плотников 2] Плотников В., Китанов П., Теорема Боголюбова для квазидифференциальных уравнений с импульсами, Укр. Математический журнал, (1997), Том 49, № 11, 1504-1511.
[Плотников 3] Плотников В., Плотникова Л., Усреднение дифференциальных включений с многозначными импульсами, Укр. Математический журнал, (1995), Том 47, № 11, 1526-1532.
[Попов 1] Попов Е., Динамика систем автоматического регулирования, Гостехиздат, Москва, (1964).
[Рожко 1] Рожко В., Устойчивость по Ляпунову в разрывных динамических системах, Дифференциальные уравнения, (1975), Том 11, № 6, 1005-1012.
[Самойленко 1] Самойленко А., Перестюк Н., Вторая теорема Боголюбова Н. Н. для систем дифференциальных уравнений с импульсными воздействием, Дифференциальные уравнения, (1974), Том 10, № 11, 2001-2010.
[Самойленко 2] Самойленко А., Перестюк Н., Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием, Вища школа, Киев, (1987).
[Самойленко 3] Самойленко А., Перестюк Н., О методе усреднения в системах с импульсными воздействием, Укр. Математический журнал, (1974), Том 24, № 3, 411-418.
[Самойленко 4] Самойленко А., Перестюк Н., Трофимчук С., Проблема "биений" в импульсных системах, Институт математики АН УкрССР, Киев, (1990).
[Самойленко 5] Самойленко А., Применение метода усреднения для исследования колебаний, возбуждаемых мгновенными импульсами в автоколебательных системах 2-го порядка с малым параметром, Укр. Математический журнал, (1961), Том 13, № 3, 85-94.
[Сендов 1] Сендов Б., Хаусдорфовые приближения, Издателство на БАН, София, (1979).
[Сендов 2] Сендов Б., Наилучшие хаусдорфовы приближения сплайн-функциями равномерными узлами, (1977), Плиска Български математически студии, Кн. 1, 79-92.
[Сендов 3] Сендов Б., Некоторы проблемы хаусдорфовой аппроксимации, (1977), Теория приближения функций, Москва, 322-329.
[Сендов 4] Сендов Б., Попов В., Точная асимптотика наилучшего приближения алгебраическими и тригонометрическими многочленами в метрике Хаусдорфа, Математический сборник, (1972), Кн. 89, 138-147.
[Сулейманов 1] Сулейманов С., О порядке приближения функций интегральными операторами в бесконечной области относительно хаусдорфовой метрики, Доклады АН АзССР, (1972), Том 28, 14-18.
[Филатов 1] Филатов А., Методы усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях, "ФАН", Узбекской ССР, Ташкент, (1971).

[Филиппов 1] Филиппов А., Дифференциальные уравнения с правой частью, разрывной на пересекающихся поверхностях, Дифференциальные уравнения, (1979), Том 15, № 10, 1814-1823.
[Филиппов 2] Филиппов А., Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью, Наука, Москва, (1985).
[Халанай 1] Халанай А., Векслер Д., Качественная теория импульсных систем, Мир, Москва, (1971).
[Хатсон 1] Хатсон В., Пим Д., Приложения функционального анализа и теории операторов, Мир, Москва, (1983).
[Цыпкин 1] Цыпкин Я., Критерии абсолютной устойчивости импульсных автоматических систем с монотонными характеристиками нелинейного элемента, ДАН СССР, (1964), Том 155, № 5, 1029-1032.
[Черноусько 1] Черноусько Ф., Акуленко Л., Соколов Б., Управление колебаниями, Наука, Москва, (1980).

ИЗВОДИ

Както многократно беше казано, обикновените диференциални уравнения с променливи структура и импулсни моменти са адекватен математически апарат за моделиране на прекъснати процеси. Специфичните особеност на този вид уравнения водят да характерни и уникални свойства на техните решения. Ще посочим следните най-важни изводи, които следват от представената дисертация:

1. При уравненията от тип Б2 (с импулсни моменти, съвпадащи с моментите, в които интегралната крива на диференциалното уравнение среща предварително зададени множества, които са разположени в разширеното фазово пространство) е възможно решението да не е продължимо от известен момент нататък. Например, когато интегралната крива среща една и съща импулсна хиперповърхнина безбройно много пъти и импулсните моменти са ограничени отгоре. Този ситуация се нарича „биене“. Поради различни причини, произтичащи от непродължимостта на решенията, е задължително да се намерят условия, гарантиращи отсъствието на феномена „биене“;
2. При уравненията от тип Б3 (с импулсни моменти, които съвпадат с моментите, в които траекторията на диференциалното уравнение среща предварително зададени множества, разположени във фазово пространство) също е възможно решението да съществува до определен момент. Това се случва, когато моментите, в които траекторията среща импулсните множества, имат точка на сгъстяване. След тази точка решението не е дефинирано. При тази ситуация се казва, че решението „трепти“. В общия случай е необходимо да се избягват подобни ситуации, поради което се търсят условия за отсъствие на „трептене“ на решенията;
3. При уравненията с произволни импулсни моменти (от тип Б5) задължително за импулсните моменти $t_1, t_2, ...$ се предполага съществуване на границата $\lim_{i\to\infty} t_i = \infty$. Причината посочихме в предходните две точки;
4. Единствеността на решенията на диференциалните уравнения (без импулси) е един от фундаменталните въпроси на теорията. При уравненията с импулсни въздействия този въпрос се нуждае от допълнителни уточнения. Причина за това е, че в общия случай след импулсно въздействие траекторията (изобразяващата точка) на дадена начална задача попада върху траекторията на друга начална задача (за същото диференциално уравнение). Конкретно, нека $x'\left(t;t_0,x_0^{'}\right)$ и $x''\left(t;t_0,x_0^{''}\right)$ са две решения на едно и също диференциално уравнение с импулси, съответно с начални точки $\left(t_0,x_0^{'}\right)$ и $\left(t_0,x_0^{''}\right)$. Освен това, нека $x_0^{'} \neq x_0^{''}$ и съответните импулсни моменти $t_i^{'}$ и $t_i^{''}$ удовлетворяват неравенството $t_i^{'} < t_i^{''}$. Тогава е възможно
$$x'\left(t_i^{'}+0;t_0,x_0^{'}\right) = x'\left(t_i^{'};t_0,x_0^{'}\right) + I_i\left(t_i^{'}, x'\left(t_i^{'};t_0,x_0^{'}\right)\right) = x''\left(t_i^{'};t_0,x_0^{''}\right).$$
Последното равенство показва, че след момента $t_i^{'}$ двете решения съвпадат, т.е. имаме
$$x'\left(t;t_0,x_0^{'}\right) = x''\left(t;t_0,x_0^{''}\right), \quad t > t_i^{'}.$$
Този ефект се нарича сливане на решения след импулсно въздействие. При изследванията задължително „се обръща внимание“ на този феномен, който за съжаление е неотстраним при уравненията с променливи импулсни моменти;
5. За решенията $x'\left(t;t_0^{'},x_0\right)$ и $x''\left(t;t_0^{''},x_0\right)$ $\left(t_0^{'} \neq t_0^{''}\right)$ на произволно автономно диференциално уравнение (без импулси) е валидно равенството
$$x'\left(t_0^{'}+\Delta t;t_0^{'},x_0\right) = x''\left(t_0^{''}+\Delta t;t_0^{''},x_0\right), \quad \Delta t > 0,$$
което се нарича свойство „автономност“. При импулсните автономни диференциални уравнения свойството автономност се губи. Причина за това са тъкмо импулсните въздействия. Моментите на тяхното осъществяване (или по-точно импулсните множества, чрез които се определят импулсните моменти) са предварително фиксирани във времето. Промяната на началния момент на съответната начална задача променя и импулсните моменти. Следователно, променя се решението - а именно след първия импулсен момент решението загубва автономността;
6. За решенията на уравненията от класовете Б2, Б3 и Б5 е ясно, че импулсните моменти са функция на параметрите на съответната начална задача (начална точка, дясна страна, импулсни множества, бариерни криви, импулсни въздействия и т.н.). С други думи различните решения притежават различни импулсни моменти. Нека решението $x'(t)$ притежава импулсни

моменти $t_1^{'}, t_2^{'}, \ldots$, а решението $x''(t)$ - $t_1^{''}, t_2^{''}, \ldots$. Както казахме, в общия случай имаме $t_0^{'} \neq t_0^{''}$, $t_1^{'} \neq t_1^{''}$, $t_2^{'} \neq t_2^{''}, \ldots$. Ще отбележим, че в интервалите с краища точките $t_i^{'}$ и $t_i^{''}$, $i = 1, 2, \ldots$, двете решения са подложени на различен брой импулсни въздействия. Това означава, че те се различават съществено (като големината на разликата е от порядъка на големината на импулсното въздействие с номер i). Следователно, използваната мярка за разстояние между тези две решения трябва да се съобрази с този феномен;

7. В настоящата дисертация са предложени два подхода за решаване на проблема, описан в предходната точка:

- За мярката $\rho = \rho\left(x'(t), x''(t)\right)$ при $t_0^{'} \leq t < T$ имаме

$$\rho = \sup\left\{\left\|x'(t) - x''(t)\right\| : \quad t_0^{'} \leq t < T; \quad \left|t - t_i^{'}\right| > \eta,\ i = 0, 1, \ldots\right\}.$$

  С други думи, при конструирането на мярката ρ на разликата между решенията $x'(t)$ и $x''(t)$ се игнорират интервалите с краища точките $t_i^{'}$ и $t_i^{''}$, $i = 1, 2, \ldots$;

- За мярката $\rho = \rho\left(x'(t), x''(t)\right)$ имаме

$$\rho = \rho_H\left(\gamma', \gamma''\right),$$

където $\rho_H\left(A, B\right)$ е Хаусдорфовото растояние между множествата A и B, а γ' и γ'' са траекториите

$$\gamma' = \left\{x'(t);\ t_0^{'} \leq t < T\right\} \text{ и } \gamma'' = \left\{x''(t);\ t_0^{''} \leq t < T\right\}.$$

Всеки един от двата варианта има положителни и слаби страни;

8. Използването на Хаусдорфовата метрика между траекториите на диференциалните уравнения с променливи импулсни моменти е съпътствано с прецизирането и намиране на някои свойства на това разстояние в случая, когато множествата са прекъснати криви. В общия случаи дефиниционните множества на кривите се различават. Различни са и съответните точки на прекъсване;

9. Когато решението не е продължимо до безкрайност поради кондензация на импулсните въздействия (в случаите, когато импулсните моменти притежават точка на сгъстяване, виж предходните точки 1, 2 и 3) се казва, че то „загива" поради импулсните въздействия. Нека решението загива и точката на сгъстяване на импулсните моменти е T. Тогава решението съществува в интервала $\left[t_0, T\right)$. В този случай е възможно в произволен времеви интервал $\left[t_0, t^0\right] \subset \left[t_0, T\right)$ да се изучават различни типове непрекъсната зависимост на решенията (например - относно началната точка, дясната страна, импулсните въздействия и т.н.). Основните трудности произтичат от факта, че във въпросния интервал $\left[t_0, t^0\right]$ различните решения притежават различен брой импулсни въздействия. Ще отбележим, че е в този случай импулсните моменти на две дадени решения във фиксирания интервал $\left[t_0, t^0\right]$ може да се различават с произволен брой. Нещо повече, при нарастване или намаляване на дължината на интервала $\left[t_0, t^0\right]$ броят на импулсните моменти за всяко от решенията също се променя;

10. При диференциалните уравнения с променливи структура и импулсни моменти е възможно при някои начални точки (например $x_0^{'}$, разположени във фазовото пространство, т.е. $x_0^{'} \in D$) импулсното множество $\Phi \subset D$ да е достижимо, т.е. съответната траектория

$$\gamma' = \left\{x'\left(t; t_0, x_0^{'}\right);\ t \geq t_0 \ \left(t \leq t_0\right)\right\},$$

която стартира от точката $\left(t_0, x_0^{'}\right)$ да пресича импулсното множество или $\gamma' \cap \Phi \neq \varnothing$. Точно обратното, при други начални точки $x_0^{''} \in D$ импулсното множество не е достижимо (за всяко $t \geq t_0$), т.е. траекторията

$$\gamma'' = \left\{x''\left(t; t_0, x_0^{''}\right);\ t \geq t_0 \ \left(t \leq t_0\right)\right\}$$

не пресича Φ или $\gamma"\cap\Phi=\varnothing$. Всички точки от типа на $x_0^{'}$ образуват така нареченото достижимо множество от начални точки. Когато достижимото множество съвпада с D, то фазовото пространство D се нарича тотално достижимо. При изследванията, свързани с качествата на решенията на диференциалните уравнения с променливи структура и импулсни моменти е удобно (а в някои случаи е задължително) да се предполага, че фазовото пространство е тотално достижимо множество от начални точки. Това предположение гарантира, че всяка траектория на уравнението достига до импулсното множество, т.е. всяко решение е подложено на импулсно въздействие. В този случай е коректно да се изследват решенията за различни асимптотични качества;

11. Импулсните въздействия служат като инструмент за поддържане на определени (естествено неприсъщи) качества на решенията. Например, такива качества са ограниченост на решенията (или ограниченост по част от координатите на решението); периодичност; устойчивост относно параметрите на съответната начална задача, поддържане на решението над минимално допустими граници и т.н. В тези случаи много често поради технически причини е наложително решението за всяко $t\geq t_0$ да се намира между две повърхнини - така наречените „бариерни повърхнини". Импулсните въздействия се реализират при пресичане на бариерните повърхнини и са с посока и големина гарантиращи, че решението остава след импулса в множеството между повърхнините. Изборът на повърхнините, конструирането на моделното уравнение, определяне на моментите и големините на импулсните въздействия представляват елемент на управление на динамичните процеси;

12. Както се вижда от дефинициите на уравненията с импулсни въздействия, параметрите им които ги определят, са повече отколкото при уравненията без импулси. Например специфични параметри за импулсните уравнения са: импулсните моменти, импулсните въздействия, импулсните множества и др. Поради тази причина са налице нови видове непрекъсната зависимост и устойчивост на решенията относно изброените по горе специфични параметри. Тази особеност дава възможност и изисква въвеждането и изследването на специфични качества на решенията на диференциалните уравнения с променлива структура и импулси;

13. Често импулсните диференциални уравнения са единственият съответен математически апарат, чрез който е възможно да се моделират и изследват редица динамични процеси. Тук като пример ще посочим изучаването на количеството на информацията в паметта при наличие на кратковременни обучения (които можем приблизително да приемем, че се извършват мигновено и скокообразно под формата на импулси). От практическа гледна точка е важно и полезно да се сравнява количеството на информация в паметта (на един и същи индивид) при различни схеми на обучение. Полезно е да се изготви подходяща програма на обучението, при която количеството на информацията не трябва да достига под определен минимум. Също така е възможно този процес да се оптимизира. По-точно с минимален брой допълнителни обучения, разположени оптимално във времето, да се достигне максимално дълъг период от време, при който информацията е над изискуем минимум. Интересен е моделът при променливо (във времето) минимално изискуемо количество на информацията. Естествено е да се предполага, че този минимум расте във времето. По този въпрос досега не са публикувани научни изследвания;

14. Уравненията с импулсни въздействия от тип Б4 (с импулсни моменти, съвпадащи с моментите, в които решението минимизира предварително зададен функционал) са полезни при решаване на определени оптимизационни задачи. Обикновено при тези процеси управлението е подчинено на човека. Тук средствата на оптимизация (управление) се свеждат до три:
- Избор на броя на импулсните моменти;
- Избор на разположението на моментите на импулсно въздействие;
- Избор на големините на импулсните въздействия.

Целта (или конкретно - целевата функция) е свързана с намирането на параметрите на екстремалната стойност на даден функционал, изразяващ определено качество на изучвания процес.

З А К Л Ю Ч Е Н И Е

В настоящия дисертационен труд са получени следните по-важни резултати:

1. Изследват се следните качества на решенията на уравнения от клас Б3, т.е. с импулсни моменти, които съвпадат с моментите, в които траекторията на диференциалното уравнение среща предварително зададени множества, разположени във фазово пространство:
   - равномерно финално ограничени решения (Въведени са редици от функции на Ляпунов);
   - непрекъсната зависимост на решенията при постоянно действащи смущения (Допуска се променлива структура на уравненията. Импулсните или по-общо превключващите множества съвпадат с контура на фазовото множество. Смущенията са както в началната точка на съответната начална задача, така и във всяка дясна страна на уравнението).
2. Изследват се следните качества на решенията на уравнения от клас Б2, т.е. с импулсни моменти, съвпадащи с моментите, в които интегралната крива на диференциалното уравнение среща предварително зададени хиперповърхнини, разположени в разширеното фазово пространство:
   - условия за отсъствие на феномена „биене“;
   - равномерна устойчивост на нулевото решение относно импулсните въздействия.
3. Въведена, използвана и изследвана е Хаусдорфовата метрика между решенията на диференциални уравнения с импулси от клас Б1 и Б3. Резултатите се отнасят за:
   - Хаусдорфово разстоянието между произволни прекъснати криви;
   - орбитална Хаусдорфова непрекъсната зависимост на решенията на уравнения от клас Б1 по отношение на разликата между импулсните моменти;
   - въведен е термина орбитална гравитация на решенията на уравнения без импулси (Проведени са изследвания за съществуване на гравитация);
   - орбитална Хаусдорфова устойчивост на решенията на уравнения от клас Б3 по отношение на началното условие.
4. Изучават се уравнения от клас Б3. Изследва се случая, когато импулсните моменти $t_1, t_2, \ldots$ притежават точка на сгъстяване T и следователно не са продължими надясно от T. Тези решения се наричат загиващи. Намерени са:
   - условия за загиване на решенията (Още се казва, че имаме феномена „трептене“ на решенията);
   - непрекъсната зависимост относно началните условия и превключващите функции на загиващи решения;
   - непрекъсната зависимост относно началните условия и импулсните въздействия.
5. Изследват се качества на решенията на автономни диференциални уравнения без импулси. Постигнати са резултатите:
   - изучени са основни свойства на специален клас интегрални многообразия;
   - въвежда се понятието функция на достижимост и се изследват нейната непрекъснатост и ограниченост;
   - въвеждат се и се изучават тотално достижими множества.
6. Изследват се автономни диференциални уравнения с променлива структура и импулсни въздействия в променливи моменти от клас Б3. Установени са:
   - непрекъсната зависимост на решенията относно началната точка;
   - съществуване на периодични решения.
7. Създаден е и се изследва математически модел на изменението на количеството на информация в паметта на човека при отсъствие на допълнителен, интензивен, външен, „кратковременен“ прием на информация. Изучени са въпросите:
   - асимптотично слабо изменение на количеството на информацията (терминът е нов);
   - равномерна Липшицова устойчивост;
   - равномерна устойчивост.
8. Въведен е и се изследва математически модел на изменението на количеството на информация в паметта на човека при отсъствие на допълнителен прием на информация. Изследванията са свързани с:
   - непрекъсната зависимост на количеството на информацията относно обема на многократните попълвания;
   - създаване на математически модел при изискване за критичен минимум на информацията в паметта;
   - непрекъсната зависимост на количеството на информацията относно началната точка и критичния минимум на информацията;
   - сравняване на количествата на информацията в два различни модела (Различията са в моментите на прием на информацията и в обема на предоставената информация);

- приблизително намиране на коефициента на съхранение на информацията в паметта на човека.

9. Конструират се уравнения от клас Б4, т.е. с импулсни моменти, при които решението минимизира предварително зададен функционал. Постиженията се отнасят до:
   - дефиниран е оптимален режим на възстановяване на биомасата на изолирана популация (Получени са моментите, в които се осъществяват отнеманията и големините на отнеманията в оптималния режим на възстановяване);
   - дефинирана е оптимална траектория на уравнение от клас Б3 (При направените изследвания целевата функция е времетраенето на допустимите стойности на решението);
   - намерени са импулсните моменти и големините на импулсните въздействия на оптималната траектория.
10. Конструирани са множество обобщени модели с променлива структура и импулсни въздействия, илюстриращи теорията в настоящия труд. Ще отбележим:
   - обобщен математически модел на Gompertz;
   - обобщен математически модел на Verhulst;
   - обобщен математически модел на Lotka-Volterra;
   - обобщен математически модел на Miller;
   - трептене на материална точка;
   - математически модел от фармакокинетиката и др.

СПИСЪК

на публикациите на проф. д-р Ангел Борисов Дишлиев по дисертацията
за придобиване на научна степен "доктор на математическите науки"

Област на висше образование: 4. Природни науки, математика и информатика;
Професионално направление: 4.5. Математика;
Научна специалност: Математическо моделиране и приложение на математиката;
Тема на дисертацията: Математическо моделиране и оптимизация на прекъснати процеси

тип на публикациите	**брой**
Монографии, издадени в чужбина	3
Статии в списания с IF	8
Статии в списания с SJR	2
Статии в списания с Google IF	2
Статии в списания без индекс	7
Статии в трудове на конференции	1
Учебници	1
Общ брой трудове	24

№	**Издател**	**Монографии, издадени в чужбина**
1.	Dynamic Publishers, USA	Dishliev A., Dishlieva K., Nenov S., Linear systems and applications in CAE software, Dynamic Publishers, Atlanta, USA, (2017), 171.
2.	Dynamic Publishers, USA	Dishliev A., Dishlieva K., Nenov S., Finite difference method and applications in CAE software, Dynamic Publishers, Atlanta, USA, (2017), 163.
3.	Scientific Research Publishing	Antonov A., Dishliev A.A., Dishliev A.B., Nenov S., Mathematical modelling of discontinuous processes, Scientific Research Publishing, Delaware, USA and Wuhan, China, (2017), 244.
	Индекс	**Статии в списания с IF**
4	IF 1,317	Bainov D., Dishliev A., Population dynamics control in regard to minimizing the time necessary for the regeneration of a biomass taken away from the population, Applied Mathematics and Computation, Vol. 39, Issue 1, (1990), 37-48.
5.	IF 0,845	Dishliev A., Bainov D., Uniform stability with respect to the impulsive perturbations of the solutions of impulsive differential equations, International J. of Theoretical Physics, Vol. 31, Issue 2, (1992), 363-372.
6.	IF 0,419	Dishlieva K., Dishliev A., Uniformly finally bounded solutions to systems of differential equations with variable structure and impulses, Electronic J. of Differential Equations, Vol. 2014, Issue 205, (2014), 1-9.
7.	IF 0,925	Dishliev A., Dishlieva K., Abou Habib M., Mathematical model of dynamics of the amount of information in human memory, American J. of Education, Vol. 123, Issue 4 (2), (2017), 1073-1081.
8.	IF 5,405	Dishliev A., Dishlieva K., Antonov A., Abou Habib M., Mathematical model of the amount of information in the human memory for short time discrete trainings, Science and Educational Studies, Vol. VIII, Issue 1 (29), (2018), 229-244.
9.	IF 5,253	Dishliev A., Dishlieva K., Antonov A., Abou Habib M., Mathematical training model maintaining minimum amount of information in the memory, London Review of Education and Science, Vol. 22, Issue 2, (2017), 323-340.
10.	IF 2,012	Dishlieva K., Dishliev A., Antonov A., Totally reachable sets for autonomous systems of differential equations, International J. of Science, Technology and Management, Vol. 4, Issue 6, (2015), 36-46.
11.	IF 1,543	Dishlieva K., Dishliev A., Antonov A., Periodic solutions of a model of Lotka-

		Volterra with variable structure and impulses, J. of Advances in Mathematics, Vol. 11, Issue 6, (2015), 5317-5325.
	Индекс	**Статии в списания с SJR**
12.	SJR 0,140	Dishlieva K., Dishliev A., Girginov C., Petkova S., Continuous dependence in case of permanent active effects on the partially bounded solutions of differential equations with variable structure, J. of Advanced Research in Dynamical and Control Systems, Vol. 5, Issue 2, (2013), 16–33.
13.	SJR 0,380	Dishlieva K., Dishliev A. B., Dishliev A. A., Optimal impulsive effects and maximum intervals of existence of the solutions of impulsive differential equations, Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series B, Applications & Algorithms, Vol. 22, (2015), 465-489.
	Индекс	**Статии в списания с Google IF**
14.	Google IF 2,316	Dishlieva K., Dishliev A., Antonov A., Chukleva R., Function of reachability for autonomous systems of differential equations, Mathematical Sciences Letters, Vol. 4, Issue 2, (2015), 91-99.
15.	Global IF 0,667	Dishlieva K., Dishliev A., Limitations of the solutions of differential equations with variable structure and impulses using sequences of Lyapunov functions, J. of Advanced Research in Applied Mathematics, Vol. 5, Issue 2, (2013), 39-52.
		Статии в списания без индекс
16.		Dishliev A. B., Bainov D. D., Investigation of the Lipshitz stability via limiting equations, Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica, Vol. 20, Issue 2, (1992), 187-193.
17.		Dishlieva K., Dishliev A., Petkova S., Death of the solutions of systems differential equations with variable structure and impulses, International J. of Differential Equations and Applications, Vol. 11, Issue 3, (2012), 169-181.
18.		Dishlieva K., Dishliev A., Chukleva R., Petkova S., Continuous dependence on the impulsive effects of dying solutions of systems differential equations with variable structure and impulses, European J. of Mathematical Sciences, Vol. 2, Issue 2, (2013), 215-228.
19.		Chukleva R., Dishlieva K., Dishliev A., Continuous dependence of dying solutions of systems differential equations with variable structure and impulses, J. of Advanced Research on Scientific Computing, Vol. 5, Issue 3, (2013), 11-21.
20.		Dishlieva K., Dishliev A., Antonov A., A class of integral manifolds for autonomous systems of differential equations, German J. of Advanced Mathematical Sciences, Vol. 1, Issue 1, (2013), 11-19.
21.		Dishlieva K., Dishliev A., Nenov S., Radeva V., Hausdorff metrics and parametric curves, International Electronic J. of Pure and Applied Mathematics, Vol. 8, Issue 2, (2014), 53-65.
22.		Dishlieva K., Dishliev A., Radeva V., Orbital Hausdorff dependence on impulsive differential equations, International J of Differential Equations and Applications, Vol. 13, Issue 3, (2014), 145-163.
	Издател	**Статии в трудове на конференции**
23.	Plovdiv University	Chukleva R., Dishliev A., On the continuous dependence of the switching moments of trajectories, Proceedings of the Jubilee Scientific Conference with International Participation Dedicated to the, 50th Anniversary of the Smolyan Branch of Plovdiv University, Vol. 2, Part 2, (2012), 75-80.
	Издател	**Учебници**
24.	ХТМУ	Дишлиев А., Дишлиева К., Ненов С. Увод в теорията на масовото обслужване, ХТМУ, София, (2016).

Благодарности:

1. Изказвам благодарности на моето семейство доц. д-р Катя Дишлиева и гл. ас. д-р Ангел А. Дишлиев за моралната подкрепа и за множеството професионални съвети;

2. Благодаря на проф. д-р Светослав Ненов за проявената настойчивост и подкрепа в минутите, когато бях разколебан относно подготовката и написването на представената по-горе дисертация;

3. Благодаря на гл. ас. д-р Андрей Антонов за проявената загриженост и оказаната помощ при оформлението на текста и изготвянето на чертежите в настоящия труд.

Проф. д-р Ангел Б. Дишлиев