



Задача К 1.4 Точка M се движи в равнината Oxy по задания в декартови координати закон: $x(t) = 5 \sin^2\left(\frac{\pi t}{6}\right) + 2$ [m], $y(t) = 5 \cos^2\left(\frac{\pi t}{6}\right)$ [m].

Иска се да се определят:

- а) уравнението на траекторията;
- б) положението на точката в началния момент и в момента $t_1 = 2$ [s];
- в) скоростта, пълното ускорение и радиуса на кривина на траекторията в момента от време t_1 .

Да се изобразят върху траекторията определените кинематични характеристики.

Решение:

1. Траектория

Елиминирането на параметъра t от закона на движение за конкретния случай става чрез събиране на двете уравнения:

$$x + y = 5 \sin^2\left(\frac{\pi t}{6}\right) + 2 + 5 \cos^2\left(\frac{\pi t}{6}\right) \quad | : 5$$

$$\frac{x+y}{5} - \frac{2}{5} = 1; \quad x + y - 2 = 5 \quad \rightarrow \quad x + y = 7 \quad \therefore$$

$$x + y - 7 = 0 \rightarrow \text{уравнение на права линия.}$$

Тъй като тригонометричните функции $\sin^2(x)$ и $\cos^2(x)$ са ограничени функции, то траекторията на точката е отсечка от тази права.

$$0 \leq \sin^2\left(\frac{\pi t}{6}\right) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 2 \leq x(t) \leq 7;$$

$$0 \leq \cos^2\left(\frac{\pi t}{6}\right) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq y(t) \leq 5.$$

Тогава т. M ще извършва праволинейно възвратно движение между точките M' (2;5) и M'' (7;0) – фиг. 1.

2. Положения на точката

при $t = 0 \rightarrow$

$$x(0) = 5 \sin^2\left(\frac{\pi \cdot 0}{6}\right) + 2 = 2$$

$$y(0) = 5 \cos^2\left(\frac{\pi \cdot 0}{6}\right) = 5$$

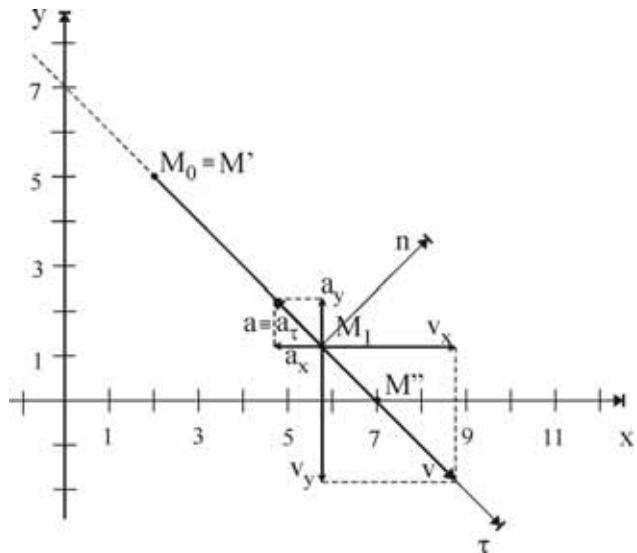
$$\Rightarrow M_0(2; 5)$$

при $t_1 = 2 \text{ [s]} \rightarrow$

$$x(2) = 5 \sin^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{6}\right) + 2 = 5,75$$

$$y(2) = 5 \cos^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{6}\right) = 1,25$$

$$\Rightarrow M_1(5,75; 1,25)$$



фиг. 1

3. Скорости и ускорения

Компонентите на скоростта се получават чрез диференциране на уравненията на движението

$$v_x = \dot{x} = 2,5 \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) \cdot \frac{\pi}{6} = 5 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{6}\right) = 5 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right) [\text{m/s}],$$

$$v_y = \dot{y} = -2,5 \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) \cdot \frac{\pi}{6} = -5 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{6}\right) = -5 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right) [\text{m/s}],$$

При $t_1 = 2 \text{ [s]}$

$$v_x(2) = 5 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{6}\right) = 2,27 \text{ [m/s]}; \quad v_y(2) = -5 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{6}\right) = -2,27 \text{ [m/s]}.$$

Големината на скоростта на точката се определя като

$$v(2) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{2,27^2 + (-2,27)^2} = 3,21 \text{ [m/s]}.$$

Направлението и посоката на скоростта на точката се получават чрез посочните косинуси

$$\lambda_v = \cos \alpha_v = \frac{v_x}{v} = \frac{2,27}{3,21} = 0,7072 \Rightarrow \alpha_v \approx 45^\circ;$$

$$\mu_v = \cos \beta_v = \frac{v_y}{v} = \frac{-2,27}{3,21} = -0,7072 \Rightarrow \beta_v \approx 135^\circ.$$

Алгебричните проекции на ускорението се определят чрез последващо диференциране на скоростните компоненти, след което се намира и пълното ускорение на точката:

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} = \frac{\pi}{3} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right) [\text{m/s}^2]; \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} = -\frac{\pi}{3} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right) [\text{m/s}^2];$$

За момента $t_1 = 2 [\text{s}]$

$$a_x(2) = \frac{\pi}{3} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{3}\right) = -0,52 [\text{m/s}^2]; \quad a_y(2) = -\frac{\pi}{3} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right) = 0,52 [\text{m/s}^2];$$

$$a(2) = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-0,52)^2 + 0,52^2} = 0,74 [\text{m/s}^2].$$

Определянето на тангенциалното ускорение се извършва по формулата:

$$a_\tau(2) = \frac{v_x(2) \cdot a_x(2) + v_y(2) \cdot a_y(2)}{v(2)} = \frac{-0,52 \cdot 2,27 + 0,52 \cdot (-2,27)}{3,21} = -0,74 [\text{m/s}^2].$$

Нормалната компонента се намира чрез зависимостта

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} \rightarrow a_n(2) = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{0,74^2 - 0,74^2} = 0 [\text{m/s}^2].$$

За радиусът на кривина следва $\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{3,21^2}{0} = \infty [\text{m}].$